Дифференциально-алгебраические и интегро-алгебраические системы уравнений: численные методы и приложения к задачам управления

Текст печатается в авторской редакции

Улан-Удэ
2019

УДК 519.64

К РАСЧЕТУ НЕСТАЦИОНАРНОГО ОБТЕКАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПРОФИЛЯ

© Пурбо Ламажапович Абидуев
кандидат физико-математических наук, доцент
Бурятская государственная сельскохозяйственная академия
имени В. Р. Филиппова
Россия, 670024, Улан-Удэ, ул. Пушкина, 8
E-mail: apl087@yandex.ru

© Дармаев Тумэн Гомбоцыренович
кандидат физико-математических наук, доцент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: dtg@bsu.ru

В данной работе рассматривается нестационарное безотрывное обтекание плоским потенциальным потоком несжимаемой жидкости произвольного профиля, колеблющегося как твердое тело с малой амплитудой по некоторому гармоническому закону. Для устранения особенности ядра интегрального уравнения Фредгольма второго рода относительно величины нестационарной скорости в точке задней кромки профиля используется постулат Кутта-Жуковского. Гидродинамический смысл проведенного устранения особенности ядра состоит в том, что решение ищется в классе функций, обеспечивающих непрерывность давления всюду в потоке, в том числе и в острой задней кромке. Критическая линия тока стационарного потока, необходимая для вычисления несобственных интегралов, определяется как решение задачи Коши. Заменяя интегралы в уравнениях конечными суммами, получаем системы из N алгебраических уравнений относительно искомых величин, которые предполагается в дальнейшем решить с применением ЭВМ.
Ключевые слова: произвольный профиль, нестационарное обтекание, идеальная несжимаемая жидкость, интегральное уравнение Фредгольма второго рода.

TO CALCULATION OF UNSTEADY FLOW OF ARBITRARY PROFILE

Purbo L. Abiduev
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof
V. R. Filippov Buryat State Academy of Agriculture
8 Pushkin St., 670024, Ulan-Ude, Russia
E-mail: apl087@yandex.ru

Tumen G. Darmaev
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: dtg@bsu.ru

In this work non-stationary continuous flow with a flat potential stream of incompressible liquid of the any profile fluctuating as a solid body with a small amplitude under some harmonic law is considered. For elimination of feature of a core of an integral equation of Fredholm of the second kind concerning the size of non-stationary speed in a point of a trailing edge of a profile the postulate of Kutta-Zhukovsky is used. The hydrodynamic sense of the carried-out elimination of feature of a kernel consists that the decision is looked for in a class of the functions providing the continuity of pressure everywhere in a stream including in a sharp back edge. The critical streamline of a steady flow necessary for calculation of the improper integrals is defined as the solution of an initial value problem. Replacing integrals in the equations with the final sums, we receive systems from N algebraic equations of rather required sizes which are supposed to be solved further with use of the computer.
Keywords: arbitrary profile, unsteady flow, ideal incompressible liquid, integrated equation of Fredholm of the second kind.

Введение

В 1922 г. Прандтль [1] сформулировал плоскую задачу о неустановившемся движении профиля при переменной циркуляции, указав, что в этом случае позади профиля должен образовываться вихревой след, форма которого так же, как и плотность распределения его вихрей неизвестны. Точное решение этой задачи Прандтль охарактеризовал как задачу «трансцендентной» трудности. В 1926г. Чаплыгин [2] установил общие формулы для сил и моментов, которые действуют на плоское тело, движущееся в идеальной несжимаемой жидкости произвольным образом при постоянной циркуляции. В 1935г. появилась работа М.В.Келдыша и М.В.Лаврентьева [3], посвященная теории колеблющейся пластинки с переменной циркуляцией. В 1935г. появилась работа Л.И.Седова [4], в которой автор устанавливает выражения для силы и момента, действующих на нестационарно движущийся профиль, и выражает их через интегралы, содержащие производные от комплексного потенциала возмущенного движения. В 1939г. [5] Л.И.Седов подробно рассмотрел случай неустановившегося движения бесконечно тонкого малоизогнутого крыла, которое в первом приближении может быть заменено прямолинейным отрезком, который является линией разрыва касательных скоростей и давлений. Вихревой след с плотностью вихрей представляет собой как бы продолжение этого отрезка. Используя аппарат интеграла Коши Л.И.Седов получил формулу для подъемной силы, и момента, а также интегральное уравнение Вагнера-Глауэрта.

Дальнейшее развитие теория нестационарных движений получила в работе Н.Н.Полякова в 1960г. [6]. Автор попытался наложить теорию нестационарных движений крыла бесконечного размаха по возможности в общей и простой форме, используя представление потенциала абсолютного возмущенного движения жидкости в форме, аналогичной форме Кирхгоффа. Исследовано влияние сил, связанных с наличием вихревого следа, который предполагается расположенным вдоль «нулевой» линии тока стационарного потока.

В книге Д.Н.Горелова [7] в компактной ясной форме с приведением последних достижений, изложена линейная теория крыла в нестационарном потоке несжимаемой жидкости и газа, в которой вихревой след предполагается заданным. Рассмотрена также нелинейная задача о нестационарном обтекании бесконечно тонкого криволинейного профиля, решенная автором совместно с Р.Л.Куляевым методом дискретных вихрей [8].

В связи с развитием применения быстродействующих ЭВМ появились работы [9-10], в которых разрабатывается методы решения ряда задач нелинейной теория крыла в нестационарном потенциальном потоке несжимаемой жидкости. Нелинейность этих задач обусловлена влиянием вихревой пелены за крылом, форма которой не задается заранее, а определяется в процессе решения. Общим для всех методов является линеаризация задачи в малой окрестности каждого момента времени и моделирование пелены за крылом системой свободных вихрей. Это позволяет строить решение шаг за шагом по времени, начиная с момента, для которого известно поле скоростей течения.

Итак, по данному вопросу в настоящее время опубликовано большое число специальных монографий и журнальных статей, но практически все имеющиеся результаты получены для слабоизогнутых и тонких профилей.

В данной работе рассматривается нестационарное безотрывное обтекание плоским потенциальным потоком несжимаемой жидкости произвольного профиля, колеблющегося как твердое тело с малой амплитудой по некоторому гармоническому закону. Ранее авторами эта задача в работе [11] приведена к интегральным уравнениям Фредгольма второго рода относительно величины стационарной скорости $v_0(s)$ и амплитудного значения нестационарной части относительной скорости $v(s)$.

1. Устранение особенности ядра

Введем прямоугольную систему координат OXY, так что ось OX совпадает с геометрической хордой профиля, в среднем положении, причем x=0 соответствует носику, а координата x=1-хвостику профиля. Обозначим через L_t - контур профиля в момент времени t, через L – контур профиля в среднем положении и, соответственно, C_t и C - - вихревые следы. Предполагаем, что в бесконечном удалении перед профилем жидкость имеет постоянную скорость V_∞.

Рассмотрим полученное ранее авторами [11] интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно величины нестационарной скорости $v(s)$:

$$\frac{1}{2}v(s)-\frac{1}{2\pi}\int_L v(\sigma)R(s,\sigma)d\sigma = F(v_0(s),s) \qquad (1)$$

$$R(s,\sigma)=K(s,\sigma)-jq\int_0^\infty e^{-jqu}K(s,u)du\,,$$

$$K(s,\sigma) = -\mathrm{Re}_i\left[\frac{ie^{i\alpha(\sigma)}}{z(s)-\zeta(\sigma)}\right] = \frac{(x(s)-\zeta(\sigma))\sin\alpha(s) - (y(s)-\eta(\sigma))\cos\alpha(s)}{(x(s)-\zeta(\sigma))^2 + (y(s)-\eta(\sigma))^2}$$

$$F(v_0(s),s) = \mathrm{Re}_i\,\Phi(s) + \frac{1}{2\pi}q^2 A_1 \times \int_0^\infty e^{-jqu}K(s,u)du\ ,$$

$$\Phi(s) = e^{i\alpha(s)}\left(\frac{jq}{2\pi}\int_L \frac{g(\sigma)e^{i\alpha(\sigma)}d\sigma}{z-\varsigma} - \frac{1}{2\pi i}\int_L v_0(\sigma)\frac{g(s)-g(\sigma)}{(z-\varsigma)^2}d\sigma + \right.$$

$$\left. + \frac{ie^{-i\alpha(s)}\beta(s)}{2}v_0(s) - \frac{jq}{2}g(s)\right)$$

$$A_1 = \mathrm{Re}_i\int_L g(\sigma)e^{i\alpha(\sigma)}d\sigma = \int_L (g_x dx + g_y dy)\ ,$$

где i – мнимая единица, j – мнимая единица, связанная с временными процессами, $\alpha(s)$ - угол наклона к оси OX касательной к контуру L, $\alpha_1(s,t) = \alpha(s) + \beta(s)e^{j\omega t}$ - угол между касательной к контуру L_t и осью OX, $q = \dfrac{\omega b}{V_\infty}$ - число Струхаля, ω – круговая частота колебаний, $g = g_x - ig_y$ - комплексная форма гармонических колебаний профиля. Интегрирование по контуру ведется в положительном направлении (против часовой стрелки). Все линейные размеры нормированы к длине хорды профиля b, а величины, имеющие размерность скорости, к скорости набегающего потока V_∞.

Особенностью уравнения (1) является то, что его ядро и правая часть конкретно выписываются лишь при известном решении соответствующей стационарной задачи. Это связано с определением вихревого следа C_t за профилем, который приближенно совпадает с критической линией тока стационарного потока *C*. Поэтому, в дальнейшем будем предполагать, что нам известны все характеристики стационарного потока.

В этих формулах контур профиля L представляет собой кривую, гладкую в смысле Ляпунова всюду, за исключением задней кромки B, которая является точкой возврата. Выбор контура L с точкой возврата в задней кромке определен требованием однозначности направления скорости в этой точке, что необходимо для построения линии вихревого следа за профилем. Выражение ядра R(s,σ) отличается от ядра K(s,σ) для соответствующей стационарной задачи наличием членов, содержащих несобственный интеграл по линии вихревого следа, который моделируется линией разрыва касательных скоростей, расположенной вдоль критической линии тока стационарного потока. Этот интеграл сходится и для практических расчетов можно перейти к конечному промежутку интегрирования.

Интегральное уравнение (1) с данным ядром справедливо для всех точек контура L за исключением задней кромки B, в которой s=σ=o и ядро имеет полюс первого порядка. Для однозначного определения решения уравнения (1) используется известный постулат Кутта-

Жуковского, который формулируется так: скачок касательной составляющей скорости жидкости в задней кромке равен интенсивности сходящего с нее вихря:

$$v(+0)+v(-0)=-\frac{jq}{v_0(0)}\int_L v(s)ds+\frac{q^2}{v_0(0)}A_1, \qquad (2)$$

где $v_0(0)$ - скорость стационарного потока в точке B, v(+o) и v(-o) - предельные значения относительной скорости жидкости при подходе к точке B снизу и сверху, соответственно.

Условие (2) используется для устранения особенности ядра уравнения (1) в задней кромке. Из (1) следует, что:

$$v(\pm 0)=\frac{1}{\pi}\int_L v(\sigma)R(\pm 0,\sigma)d\sigma+2F(\pm 0) \qquad (3)$$

Тогда уравнение(1) с учетом (2) и (3) запишется в виде:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}v(s)-\frac{1}{2\pi}\int_L v(\sigma)\left(R(s,\sigma)-\frac{1}{2}\left(R(+0,\sigma)+R(-0,\sigma)+\frac{jq\pi}{v_0(0)}\right)\right)d\sigma=\\&=F(s)-\frac{1}{2}\left(F(+0)+F(-0)-\frac{q^2}{2v_0(0)}A_1\right)\end{aligned} \qquad (4)$$

Ядро полученного уравнения (4) не имеет особенностей на контуре L и его решение совпадает с решением (1).

Гидродинамический смысл проведенного устранения особенности ядра состоит в том, что решение уравнения (1) ищется в классе функций, обеспечивающих непрерывность давления всюду в потоке, в том числе и в острой задней кромке.

2. Метод расчета

Интегральное уравнение (4) разделим на действительную и мнимую по j части. Для этого запишем его в операторном виде:

$$(A+jB)v(s)=a+jb,\quad v(s)=v_1(s)+jv_2(s), \qquad (5)$$

где

$$\begin{aligned}&A=E-\frac{1}{\pi}\int_L\left(K(s,\sigma)-\frac{K(+0,\sigma)+K(-0,\sigma)}{2}-\right.\\&\left.-q\int_0^\infty \sin qu\left(K(s,u)-\frac{K(+0,u)+K(-0,u)}{2}\right)du\right)d\sigma\end{aligned} \qquad (6)$$

$$B=\frac{q}{\pi}\int_L\left(\int_0^\infty \cos qu\left(K(s,u)-\frac{K(+0,u)+K(-0,u)}{2}\right)du-\frac{\pi}{2v_0(0)}\right)d\sigma \qquad (7)$$

$$a = 2\,\mathrm{Re}_i\left(\frac{e^{i\alpha(s)}}{2\pi i}\int_L v_0(\sigma)\frac{g(s)-g(\sigma)}{(z-\varsigma)^2}d\sigma\right)+\frac{q^2A_1}{2\pi}\int_0^\infty \cos(qu)K(s,u)du - \\ -\frac{1}{2}\left(a(+0)+a(-0)-\frac{q^2A_1}{2v_0(0)}\right) \tag{8}$$

$$b = q\,\mathrm{Re}_i\left(e^{i\alpha(s)}\left(\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\overline{g}(\sigma)e^{i\alpha(\sigma)}d\sigma}{z-\varsigma}-q\overline{g}(s)\right)\right)+ \\ +\frac{q^2A_1}{\pi}\int_0^\infty \sin(qu)K(s,u)du-\frac{b(+0)+b(-0)}{2} \tag{9}$$

Критическая линия тока стационарного потока, необходимая для вычисления несобственных интегралов в формулах (6) – (9), определяется как решение следующей задачи Коши:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=v_{0x}(x,y)\\ \dfrac{dy}{dt}=v_{0y}(x,y)\end{cases} \\ x(0)=x_B=1,\quad y(0)=y_B=0 \tag{10}$$

Здесь (x_B, y_B) - координата выходной кромки профиля в среднем положении. Функции $v_{0x}(x,y),\quad v_{0y}(x,y)$ определяются по формуле:

$$v_{0x}-iv_{0y}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{v_0(\sigma)d\sigma}{z(\tau)-\zeta(\sigma)}+e^{-i\theta}, \tag{11}$$

где $z(\tau)-\zeta(\sigma)=(x(\tau)-\xi(\sigma))+i(y(\tau)-\eta(\sigma)),\quad \tau$ - длина дуги контура, отсчитываемая вдоль линии вихревого следа от задней кромки, θ - геометрический угол атаки, образуемый вектором скорости потока на бесконечности $\overline{V}_\infty$ и осью OX.

Разделяя уравнение (5) на действительную и мнимую части получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases}Av_1(s)-Bv_2(s)=a\\ Bv_1(s)+Av_2(s)=b\end{cases} \tag{12}$$

Из первого уравнения находим:

$$v_1(s)=A^{-1}Bv_2(s)+A^{-1}a \tag{13}$$

Подставляя (13) во второе уравнение (12) и решая полученное уравнение относительно $v_2(s)$ имеем:

$$v_2(s)=(BA^{-1}B+A)(b-BA^{-1}a) \tag{14}$$

Откуда, подставляя в (13)

$$v_1(s)=A^{-1}B(BA^{-1}B+A)(b-BA^{-1}a)+A^{-1}a \tag{15}$$

Далее применяется метод замены интегрального уравнения системой алгебраических уравнений, предложенный в работах [12-14]. Метод основан на замене профиля вписанным N-угольником с длиной стороны порядка величины N^{-1} и внутренним углом, близким к π. Контур профиля L разбивается на N участков $l_k, (k = 1,2,...,N)$ длины dl_k. Обозначим l_k^0 и dl_k^0 соответственно хорду, стягивающую дужку l_k и длину хорды l_k^0, далее s^0, σ^0 - дуговые координаты точек на ломанной $L^0 = \bigcup l_k^0$ отсчитываемые в положительном направлении обхода контура L. Разбиение контура выбирается так, чтобы выходная кромка являлась общей дужек l_1 *и* l_N. Целесообразность такого разбиения оправдывается характером течения в окрестности выходной кромки, который используется для устранения особенностей ядер интегральных уравнений. Заменяя интегралы в уравнениях (6-9,11) конечными суммами, получим системы из N алгебраических уравнений относительно искомых величин, которые можно решить с применением ЭВМ.

Заключение

Интегральное уравнение Фредгольма второго рода относительно величины нестационарной скорости $v(s)$ справедливо для всех точек контура L за исключением задней кромки B, в которой s=σ=o и ядро имеет полюс первого порядка. Для устранения особенности ядра уравнения используется постулат Кутта-Жуковского. Гидродинамический смысл проведенного устранения особенности ядра состоит в том, что решение ищется в классе функций, обеспечивающих непрерывность давления всюду в потоке, в том числе и в острой задней кромке. Критическая линия тока стационарного потока, необходимая для вычисления несобственных интегралов, определяется как решение задачи Коши (10). Заменяя интегралы в уравнениях (6-9,11) конечными суммами, получаем системы из N алгебраических уравнений относительно искомых величин, которые предполагается в дальнейшем решить с применением ЭВМ.

Литература

1. Prandtl L. Uber die Enstehung von Wirbeln in einer idealen Flussigkeit // Vortrage zur Hydro-und Aerodynamik. Berlin. 1924.
2. Чаплыгин С.А. О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущее в нем цилиндрическое крыло // Труды ЦАГИ. – 1926. – вып.19
3. Келдыш М.В, Лаврентьев М.А. К теории колеблющегося крыла // Технические заметки ЦАГИ. – 1935. - № 45.
4. Седов Л.И. К теории неустановившихся движении внутри жидкости // Труды ЦАГИ. - 1935. – вып.229.
5. Седов Л.И. Теория плоских движений идеальной жидкости.- ГТТИ, 1939.
6. Поляков Н.Ф. Теория нестационарных движений несущей поверхности. Л., 1960.
7. Горелов Д.Н. Теория крыла в нестационарном потоке. Новосибирск, 1975.

8. Горелов Д.Н., Куляев Р.Л. Нелинейная задача о нестационарном обтекании профиля несжимаемой жидкостью // Известия АН СССР. МЖГ. – 1971. - №6.

9. Головкин В.А. Нелинейная задача о неустановившемся обтекании произвольного профиля со свободно деформирующимся вихревым следом // Ученые записки ЦАГИ. – 1972. – т.3. - №3.

10. Павловец Г.А. Методы расчета обтекания сечения крыла идеальным несжимаемым потоком // Труды ЦАГИ. – 1971.- вып.1344

11. Дармаев Т.Г., Дамбаев Ж.Г. О нестационарном обтекании произвольного профиля // Вестник Бурятского государственного университета. Математика, информатика. – 2013.- № 2. – С.60-69

12.Дармаев Т.Г., Цыдыпов Б.Д. Метод расчета стационарного обтекания произвольного профиля // Вестник БГУ. Математика, информатика. - Улан-Удэ. - 2016. Выпуск 3. - С. 51-56

13.Рябченко В.П., Сарян В. Э. К расчёту аэродинамических характеристик решёток профилей произвольной формы // Известия АН СССР. МЖГ. – 1972. - №2. – С.105-112.

14.Рябченко В.П. Нестационарные аэродинамические характеристики решёток произвольных профилей, вибрирующих в потенциальном потоке несжимаемой жидкости // Известия АН СССР. МЖГ. – 1974. – № 1 – С.15-20

References

1. Prandtl L. Uber die Enstehung von Wirbeln in einer idealen Flussigkeit // Vortrage zur Hydro-und Aerodynamik. Berlin. 1924.

2. Chaplygin S.A. O vliyanii ploskoparallelnogo potoka vozdukha na dvizhushee v nem tsilindricheskoe krylo [About influence of plane-parallel air flow on the cylindrical wing moving in it] // Trudy TsAGI. – 1926. – vip.19

3. Keldysh M.V., Lavrentiev M.A. K teorii koleblushegosya kryla [To the theory of the fluctuating wing] // Tekhnicheskie zametki TsAGI. – 1935. - № 45.

4. Sedov L.I. K teorii neustanovivshikhsya dvizhenii vnutri zhidkosti [To the theory unsteady motions in liquid] // Trudy TsAGI. - 1935. – vip.229.

5. Sedov L.I. Teoriya ploskikh dvizhenii idealnoi zhidkosti [Theory of flat movements of a ideal fluid].- GTTI, 1939.

6. Polyakov N.Ph. Teoriya nestatsionarnykh dvizhenii nesushei poverkhnosti [Theory of non-stationary movements of a carrying area]. L., 1960.

7. Gorelov D.N. Teoriya kryla v nestatsionarnom potoke [The wing theory in an unsteady flow]. Novosibirsk, 1975.

8. Gorelov D.N., Kulyaev R.L. Nelineinaya zadacha o nestatsionarnom obtekanii profilya neszhimaemoi zhidkostiyu [Nonlinear task about non-stationary flow of a profile with incompressible liquid] // Izvestia AN SSSR. MZhG. – 1971. - №6.

9. Golovkin V.A. Nelinaya zadacha o neustanovivshemsya obtekanii proizvolnogo profilya so svobodno deformiruyushimsya vikhrevym seldom [Nonlinear task about the unsteady flow of the any profile with freely deformed vortex trace] // Uchenye zapiski TsAGI. – 1972. – т.3. - №3.

10. Pavlovets G.A. Metody rascheta obtekania secheniya kryla idealnym neszhimaemym potokom [Computational methods of flow of wing section with an ideal incompressible stream] // Trudy TsAGI. – 1971.- vip.1344

11.Darmaev T.G., Dambaev Zh. O nestatsionarnom obtekanii proizvolnogo profilya [About the unsteady flow of arbitrary profile] // Vestnik Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika. – 2013.- № 2. – Pp.60-69

12.Darmaev T.G., Tsydypov B.D. Metod rascheta statsionarnogo obtekaniya proizvolnogo profilya [Method of calculation of a stationary flow of any profile] // Vestnik

Buryatskogo gosudarstvennogo universiteta. Matematika, informatika. - 2016. Vipusk 3. - Pp. 51-56

13.Ryabchenko V.P., Saryan V.E. K raschetu aerodynamicheskikh kharakteristik reshetok profilei proizvolnoi formy [To calculation of aerodynamic characteristics of lattices of profiles of the arbitrariest form] // Izvestia AN SSSR. MZhG. – 1972. - №2. – Pp.105-112.

14.Ryabchenko V.P. Nestatsionarnye aerodynamicheskie kharakteristiki reshetok proizvolnykh profilei, vibriruyushikh v potentsialnom potoke neszhimaemoi zhidkosti [Nonstationary aerodynamic characteristics of lattices of the arbitrariest profiles vibrating in a potential stream of incompressible liquid] // Izvestia AN SSSR. MZhG. – 1974. – № 1 – Pp.15-20

УДК 378.016:51

НЕПРЕРЫВНАЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ ПОДГОТОВКА МАТЕМАТИКОВ

© Антонова Лариса Васильевна
кандидат физико-математических наук, доцент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

© Антонов Вячеслав Иосифович
кандидат физико-математических наук, доцент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

© Бурзалова Татьяна Васильевна
кандидат физико-математических наук, доцент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

Идея непрерывного образования реализована нами как непрерывная последовательность предпрофильной подготовки в 8-9-х классах, профильного обучения в 10-м и 11-м классах и профессиональной подготовки, по результатам которой студенты овладевают профессиональной компетентностью и осуществляют выбор вида профессиональной деятельности.
Ключевые слова: непрерывное образование, предпрофильная подготовка, профильное обучение, профессиональная подготовка, субъектификация математических объектов.

CONTINUOUS PROFESSIONAL TRAINING OF MATHEMATICIANS

Larisa V. Antonova
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

Vyacheslav I. Antonov
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

Tatyana V. Burzalova
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

The idea of continuous education is implemented by us as a continuous sequence of pre-profile training 8-9 classes, specialized training in 10th and 11th grades and professional training, the results of which students acquire professional competence and carry out the choice of professional activity.
Keywords: continuing education, pre training, specialized training, professional training, subjectification mathematical objects.

Непрерывное образование в эпоху информатизации стало необходимостью. Чтобы жить и создавать в информационном обществе, быть способным не только выбирать и усваивать непрерывно нарастающий поток необходимой ему информации, но и самому творить новую информацию, человек вынужден постоянно учиться.

Решающее значение имеет потребность личности в непрерывном образовании. В отличие от обычной потребности в образовании, которая возникает почти естественным образом и отсутствие которой выглядит неестественным, формирование потребности в непрерывном образовании требует кропотливого труда, поскольку люди привыкли к образованию на всю жизнь, а образование через всю жизнь кажется неестественным и излишним. Потребность в непрерывном образовании не возникает до образования, и только в процессе профессионального образования в контексте формирования специфических личностных качеств, достижения определённого уровня профессиональной компетентности, приобретения жизненного опыта, интеллектуальности и креативного развития, при достижении нравственной, социальной, психофизиологической зрелости, внутренней свободы, финансовой независимости и т.д. Миссия человека состоит в том, чтобы стать достойным наследником достигнутой предыдущими поколениями культуры, способствовать её дальнейшему развитию и сделать так, чтобы последующие поколения были способны к непрерывному образованию во имя совместного прогресса природы и общества.

Идея непрерывного образования реализована нами как непрерывная последовательность предпрофильной подготовки в 8-9-м классах школ г. Улан-Удэ, по результатам которой происходит выбор учащимися профиля обучения; профильного обучения в 10-м и 11-м классах, по результатам которого происходит выбор учащимися будущей профессии и профессионального учебного заведения; профессиональной подготовки, по результатам которой студенты овладевают профессиональной компетентностью и осуществляют выбор вида профессиональной деятельности.

Объектами профессиональной деятельности математиков являются понятия, гипотезы, методы и математические модели, составляющие содержание математики. К данным математическим объектам, исходя из герменевтического подхода, следует относиться как текстам математической культуры, возникшим из диалога, который уже имел место в жизни автора текста или в общении с самим собой. Поэтому вполне возможна субъектификация математических объектов, наделение их субъективно-

стью, т.е. свойствами, качествами и функциями субъекта. В этом случае студент, воспринимающий математический текст, будет переживать собственную личностную динамику, математический текст будет выступать опосредствующим элементом при построении студентом своих отношений с миром, открываться как субъект совместной деятельности и общения. Такое взаимодействие студента с субъектифицированным текстом отражает творческий характер математической деятельности.

В субъектификации математических объектов особая роль принадлежит математическому моделированию, благодаря которому реальные процессы получают изоморфное отражение в математических объектах. В них находят воплощение даже такие явления, например, гравитация или электромагнитные явления, сущность которых скрыта от нас. Математическое моделирование – это не только эффективный способ познания непознанных иначе явлений, но и прекрасный способ самопознания, самореализации самовоспитания, это путь к самому себе. Оно формирует мировоззрение, самого человека. Изучение математических моделей – гелиоцентрической системы мира, теории электромагнетизма, теории относительности, моделей мирового развития Римского клуба и других, а также собственный опыт математического моделирования, как показывают наши наблюдения, формирует отношение человека к миру, к математике, к науке в целом, и, что не менее важно, отношение к самому себе как личности и математику.

Путь в науку может и должен начинаться в школе. Теперь для того, чтобы найти свой путь в науку, хорошие условия возникают в профильных классах. Индивидуализация и дифференциация обучения достигается возможностью изменений прежде всего в содержании образования, разрабатываемого для каждого в соответствии с его возможностями и интересами.

Большое значение для формирования интереса математике как науке имел разработанный нами курс «История и методология математики», в котором математика представала в виде живой истории в задачах и лицах, в методах математического освоения окружающей действительности, создавался образ математики как науки и образ «обобщённого математика» по портретам выдающихся математиков, возникавшим в связи с изучением их биографии и открытий. Индивидуальная траектория вхождения в математическую науку разрабатывалась каждым учеником в его программе «мой путь в математику», представлявший собой маршрут движения от задачи к задаче, от одной темы к другой, от одной книги к другой, от учебной дисциплины к науке, её началам. Для наделённых способностью учащихся путь в науку не представляет особых проблем: для них достаточно вовремя открыть нужную дверь, показать, куда идти, что прочитать, дать необходимую задачу или книгу. Учитель выступает в роли партнёра способного ученика в его движении в науку, в достижении цели, целеполагании и мотивации к достижению успеха за счёт собственных усилий.

Психологическим содержанием развития профессиональной компетентности рассматривается самосознание, которое является результатом рефлексии и проявляется как «Я-концепция», стержнем которой выступает потребность в непрерывном образовании, в повышении общего и профессионального потенциала в течение жизни.

Профильное и профессиональное образование следует рассматривать как целостный совокупно-интегрированный образовательный процесс, центрированный на становление личности обучаемого, для чего требуется организация образования с учётом индивидуальных качеств личности, эксклюзивный отбор содержания и методов обучения, обеспечение индивидуальной траектории профессионального образования. Одним из центральных качеств личности, которое связано с характером любой деятельности, но в особой степени с математической деятельностью, является креативность, являющаяся имманентным свойством личности, развитие которого требует преодоления различных барьеров в виде социальных стереотипов и норм. Креативность – это свобода мысли, отвлечённая от давления общественных условностей и интеллектуальных факторов. Креативность – прерогатива свободной личности.

В структуре математической креативности важнейшими компонентами являются дивергентное мышление, математическая интуиция, способность порождать новые идеи гипотезы, логическая строгость, способность создавать новые понятия и новые методы исследования.

Вопреки общепринятому мнению о сугубо индивидуальном характере исследовательской деятельности математика, об отрешённости математика от окружающего мира, от общения со своими коллегами, мы утверждаем, что математическая деятельность больше чем другая требует общения, обмена информацией, выработки совместной программы во многих видах математических исследований, восприятия и понимания математиками друг друга. Даже великие математики нуждаются в общении, поскольку общение и деятельность едины (А.Н. Леонтьев), каждый сколько-нибудь значительный учёный заинтересован не только в достижении собственных целей, но также он заинтересован своей науки в целом, в продолжении исследований актуальных проблем его учениками, а это невозможно без общения. Московская математическая школа служит замечательным примером взаимодействия математиков через общение. Основоположник этой школы Н.Н. Лузин, А.Н. Колмогоров, П.С. Александров и другие придавали большое значение общению, обмену информацией в их научной деятельности. Н. Винер постоянно и эффективно прибегал к интерактивной стороне общения в организации совместных исследований.

О необходимости и пользе постоянного общения, в котором учитываются особенности математического языка и математического мышления, обеспечивается развитие коммуникативных и организаторских способностей будущих математиков и в период их обучения в школе и вузе.

Математик обязан знать историю и методологию математики, недолжен слепо верить в силу и могущество математики, несмотря на «непостижимую эффективность математики в естественных науках» (Ю. Виг-

нер). Знания о проблемах и противоречиях в развитии математики, об «утрате неопределённости» в математике (М. Клайн), на наш взгляд не приведут к негативному отношению учащихся и студентов к своей науке, к формированию свой профессиональной компетентности, а, напротив, будут способствовать развитию мотивации учебно-профессиональной деятельности на математическом поприще.

Основной вывод состоит в том, что интеграция профильного обучения в школе и профессиональной подготовки в вузе является естественной и актуальной стратегией эффективного личностного и профессионального развития личности.

Узловыми точками непрерывного развития профессиональной компетентности математика в системе «школа-вуз»являются выбор математического профиля — выбор профессии математика — выбор профессиональной математической деятельности.

Формируемая в контексте развития ряда специфических личностных качеств потребность в непрерывном математическом образовании становится основой доминирующего мотива учебной деятельности, направленной на овладение профессиональной математической компетентностью.

Основным принципом отбора содержания непрерывного профессионального образования математика послужил принцип фундаментализации, чтобы в структуре содержания образования были представлены компоненты, необходимые для овладения не только профессиональными, но и общекультурными компетенциями.

Субъектификация математических объектов позволила реализовать герменевтический подход к математическим текстам в режиме диалогического общения педагога и обучаемого.

Математическое моделирование явилось универсальным средством реализации личностно-ориентированного подхода в развитии творческих способностей, коммуникативных и организаторских склонностей, профессионального самосознания.

Литература

1. Антонова Л.В., Бурзалова Т.В. Психологические аспекты непрерывного профессионального развития личности математика// Проблемы учебного процесса в инновационных школах: сб. науч. тр./под ред. О.В. Кузьмина.-Иркутск: Изд-во Иркут.ун-та,2014.- Вып.19.-С.13-17.

References

1. Antonova L.V., Burzalova T.V. Psychological aspects of continuous professional development of personality mathematics// Problems of educational process in innovative schools : Collection of scientific papers / edited by Kuzmin O. V. – Irkutsk: Publishing House of ISU, 2014. –no. 19. – Pp. 13-17.

УДК 330

ЭКОНОМИЧЕСКИЙ РОСТ С УЧЕТОМ ЭКОЛОГИИ НА МАГИСТРАЛЬНЫХ ТРАЕКТОРИЯХ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ

© Ачитуев Самбу Ачитуевич
доктор (Ph.D.), кандидат технических наук,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: sambu59@mail.ru

© Мангалжалав Чимид
доктор (Ph.D.), профессор,
Монгольский университет науки и технологии,
E-mail: Mangal85@yahoo.com

Предлагается задача оптимального управления, на классической постановке (математическая модель) Р. Солоу, экономическая система представленная как производственный процесс, функционирующая на достаточно продолжительном интервале времени, где кроме произведенного полезного продукта (блага), учитываются затраты на экологию. Оптимальный поиск параметра управления объемом инвестиционного фонд (с коэффициентом эффективного использования) направляемого на ликвидацию негативной антропогенной нагрузки экономики на природу, исследуется в данной статье.

На основании достаточных условий оптимальности в форме В.Ф. Кротова и соответствующих преобразовании исходная задача редуцируется к некоторой производной задаче с траекторией в виде магистрали, как решение инвариантное относительно части граничных условий.

В рамках теории оптимального управления рассматривается класс задач со свободным правым концом с начальными данными на фазовые переменные как компонент вектора состояния экономической системы в начальный момент времени. Применение достаточных условий оптимальности Кротова с конструированием специальных и разрешающей функций позволяет преобразовать исходную задачу оптимального управления в задачу математического программирования. Локализация задачи состоит в расширении множества допустимых, сопровождающимся специальным продолжением целевого функционала на это более широкое множество. Продолжение обеспечивается функцией Кротова, это произвольная достаточно гладкая скалярная функция, что позволяет для решения поставленной задачи использовать богатый арсенал методов классической оптимизации.

Критерий качества как экономический показатель с дисконтирующим коэффициентом — максимизация прибыли от непроизводственного потребления минус затраты на экологию. Рассматривается, как вариант, анали-

тический (в формализованном виде) представленного в виде функции полезности.
В статье анализируются инвестиции, поступающие от государства, для развития данной модели представляется интересным в дальнейшем исследовать инвестиции от частного инвестора.
Магистральные свойства рассматриваются при нахождении экономики в стационарном режиме.

ECONOMIC GROWTH TAKING INTO ACCOUNT ECOLOGY ON THE TURNPIKE TRAJECTORIES IN THE PROBLEM OF OPTIMAL CONTROL

Sambu A. Achituev
PhD. Sci. (Technology)
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: sambu59@mail.ru

Chimid Mangalzhalav
Mongolian University of science and technology
E-mail: Mangal85@yahoo.com

The proposed optimal control problem, in the classical formulation (mathematical model) R. Solow, the economic system is represented as a production process, functioning for a sufficiently long time interval, where in addition to produced a useful product (good), considers the costs to the environment. The optimal search for the volume management parameter of the investment Fund (with the coefficient of effective use) aimed at eliminating the negative anthropogenic load of the economy on nature is studied in this article.
On the basis of sufficient optimality conditions in the form of V. F. Krotov and corresponding transformation, the initial problem is reduced to some derivative problem with a trajectory in the form of a highway, as a solution invariant with respect to a part of the boundary conditions.
In the framework of the theory of optimal control, a class of problems with a free right end with initial data on phase variables as a component of the vector of the state of the economic system at the initial time is considered. The use of sufficient Krotov optimality conditions with the construction of special and resolving functions makes it possible to transform the original optimal control problem into a mathematical programming problem. The localization of the problem consists in extending the set of admissible ones accompanied by a special extension of the target functional to this wider set. The continuation is provided by the Krotov function, it is an arbitrary smooth scalar function, which allows to use a rich arsenal of classical optimization methods to solve the problem.
The criterion of quality as an economic indicator with a discounting coefficient is the maximization of profit from non-production consumption minus the cost

of ecology. It is considered, as an option, analytical (in formalized form) presented as a utility function.
The article analyzes the investments coming from the state, for the development of this model it is interesting to further explore investments from a private investor.
The turnpike properties are considered when the economy is in a stationary mode.

УДК 004.432.2

О ПОЛНОЙ ЛОКАЛИЗАЦИИ СРЕДЫ ПРОГРАММИРОВАНИЯ FMSLOGO

© Баглаев Игорь Ильич
кандидат физико-математических наук, доцент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

В статье рассматривается среда программирования FMSLogo, одна из реализаций языка Лого, созданного известным математиком и психологом С. Пейпертом. По его мнению, компьютер и Лого-среда способны придать процессу обучения естественный неформализованный характер. Описываются уровни процесса локализации среды FMSLogo на русский язык и сущность полной локализации программного обеспечения на примере FMSLogo. Обосновывается необходимость полной локализации для эффективного использования среды FMSlogo в учебном процессе как инструментального средства обучения.
Ключевые слова: Лого, среда программирования FMSLogo, локализация на русский язык, инструментальное средство обучения.

ABOUT FULL LOCALIZATION OF PROGRAMMING ENVIRONMENT FMSLOGO

Igor I. Baglaev
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

The article discusses the FMSLogo programming environment, one of the implementations of the language Logo created by the famous mathematician and psychologist S. Peipert. In his opinion, the computer and the logo-environment can give the process of learning a natural non-formalized character. The levels of the localization process of the FMSLogo environment into Russian and the essence of the full software localization are described on the example of FMSLogo. It justifies the need for full localization for the effective use of the FMSlogo environment in the educational process as a tool for learning.
Keywords: Logo, FMSLogo programming environment, localization into Russian, a tool for learning.

Введение

Развитие информационных технологий повлекло широкую компьютеризацию образования и сделало компьютер универсальным инструментом обучения. Одним из теоретиков компьютерного образования является Сеймур Пейперт, им же был создан язык Лого, позволяющий сделать компьютер интересным, быстрым и глубоким средством обучения. Среда программирования FMSLogo, одна из реализаций языка Лого, является свободно распространяемой, имеет простой графический интерфейс и в то же время имеет достаточно мощные средства компьютерного моделирования. В силу этого она была выбрана для локализации на русский язык.

Среда программирования FMSLogo

Язык Лого был разработан в 1968 г. в Массачусетском технологическом институте Сеймуром Пейпертом, известным математиком и одним из основателей теории искусственного интеллекта для обучения программированию школьников. «Лого» — это диалект языка ЛИСП, языка, используемого для решения задач в области искусственного интеллекта, происходит от греческого «Логос», обозначающего одновременно и слово, и разум. С момента своего возникновения Лого определялся не только как язык программирования, но и как философия образования [5]. По мнению создателей Лого, компьютер может изменить сам характер учения, сделать его более интересным и продуктивным, компьютер и Лого-среда – это в первую очередь средство, способное придать процессу обучения естественный, неформализованный характер.

Имеются различные версии языка Лого — MicroWorlds, Imagine, ЛогоМиры, Starlogo, ComeniusLogo, MSWLogo, USBLogo, NetLogo и др. Одной из популярных версий Лого в силу простоты использования является среда FMSLogo. Особенно популярен Лого как начальный язык программирования, и в этом качестве имеет большие преимущества.

Первое из них - принцип, заложенный в концепцию Лого – это “low floor – high ceiling ” (низкий порог – высокий потолок). Язык, которым может овладеть не искушенный в математике новичок и то же время мощный язык программирования, которым могут пользоваться профессиональные программисты, позволяет использовать его не только как язык обучения программированию, а также как инструментальное средство при изучении математики и многих других дисциплин.

Второе – наглядность. В языке предусмотрен специальный исполнитель команд – Тортила (по-английски turtle) [2]. Наблюдая за поведением Тортилы, управляемой командами, легко понять и усвоить средства языка программирования.

Третье – направленность на компьютерное моделирование и исследование, возможность построения своей учебной среды – микромира.

Исходный код является свободно распространяемым и развивается международной группой программистов под руководством Д. Костанцо. За пятнадцатилетний период развития FMSLogo, были проведены локализации на наиболее распространенные национальные языки, такие как: немецкий, испанский, французский, русский, китайский и др. (рис. 1).

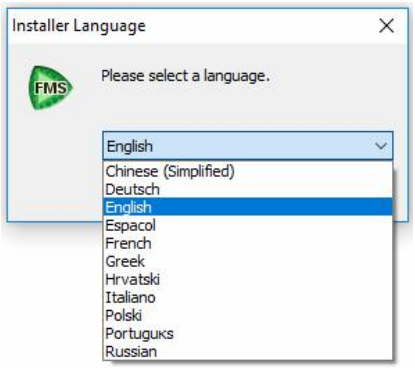


Рис. 1. Окно установщика программы
с выбором национальной локализации

Процесс локализации среды FMSLogo на русский язык

Под локализацией (от англ. localitation) понимается процесс перевода и адаптации совокупности средств и методов взаимодействия со средой системы команд, вспомогательных файлов, документации и др.

Выбор для локализации среды FMSLogo обусловлен, кроме всего прочего, тем что она является свободно распространяемой, аналогичная - ЛогоМиры является коммерческой.

Первичная локализация на русский язык среды программирования FMSLogo была проведена в 2009 году в Бурятском государственном университете Баглаевым И. И. и включена в штатный дистрибутив FMSLogo версии 6.23 [3, 6]. Русская локализация FMSLogo, начиная с версии 6.23 до последней 7.4 активно использовалась автором статьи для обучения программированию школьников в системе дополнительного образования Республики Бурятия и как инструментальное средство в учебных курсах: Компьютерная геометрия, Фрактальная геометрия, Компьютерное моделирование и др. в Бурятском государственном университете [4]. Известны факты применения локализованной версии FMSLogo в других образовательных учреждениях. В пункте Помощь меню FMSLogo имеется раздел «О FMSLogo…», в котором указывается автор русской локализации (рис. 2).

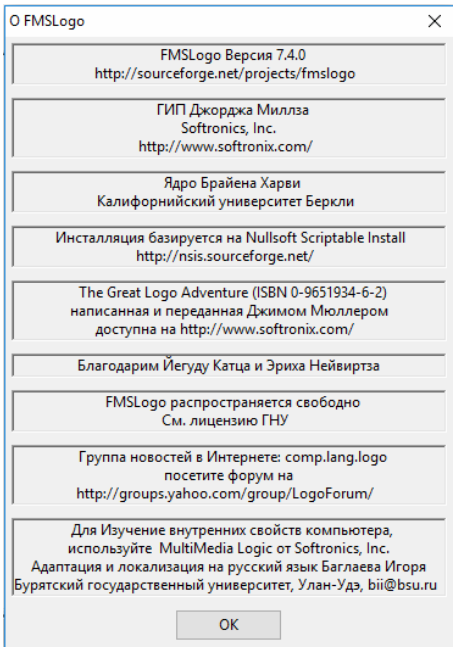


Рис. 2. О русской локализации FMSLogo

Процесс локализации среды FMSLogo нами условно разбивается на три уровня, которые заключаются в переводе и адаптации на русский язык:

1. интерфейса и сообщений об ошибках;
2. команд и функций языка, составление англо-русского и русско-английского словарей команд и функций;
3. справочной системы, включающей в себя:

- справочную информацию по командам и функциям среды, сгруппированные в отдельные главы;
- обучающую и демонстрационные программы;
- примеры, иллюстрирующие применение языка Лого для решения широкого круга задач.

На первом этапе была проведена локализация на первом и втором уровнях. Получившийся в результате вариант локализованной среды FMSLogo (рис. 1) оказался вполне работоспособным и активно использовался автором в учебном процессе на разных ступенях образования от общеобразовательной до послевузовской профессиональной. Нужно отметить, что данный опыт был достаточно успешным.

Программирование на русском языке вполне возможно и можно даже сказать полезно. Примерами программирования на русском языке являются программирование на языке 1С, языки программирования для семейства советских ЭВМ МИР, русский алгоритмический язык А. П. Ершова, Кумир.

Локализация справочной системы

В настоящее время ведется работа по локализации справочной системы. Решение данной задачи позволит выполнить полную локализацию среды программирования FMSLogo.

Первоначально нами создается автономная версия справочной системы, которая в дальнейшем будет интегрирована в среду FMSLogo. Она создается с помощью программы Microsoft HTML Help Workshop в формате .chm (Compiled Help Modules) – скомпилированные модули справки. CHM-справка представляет собой древовидную структуру, состоящую из отдельных книг, глав, разделов, тем, статей, показанную на рис. 3.

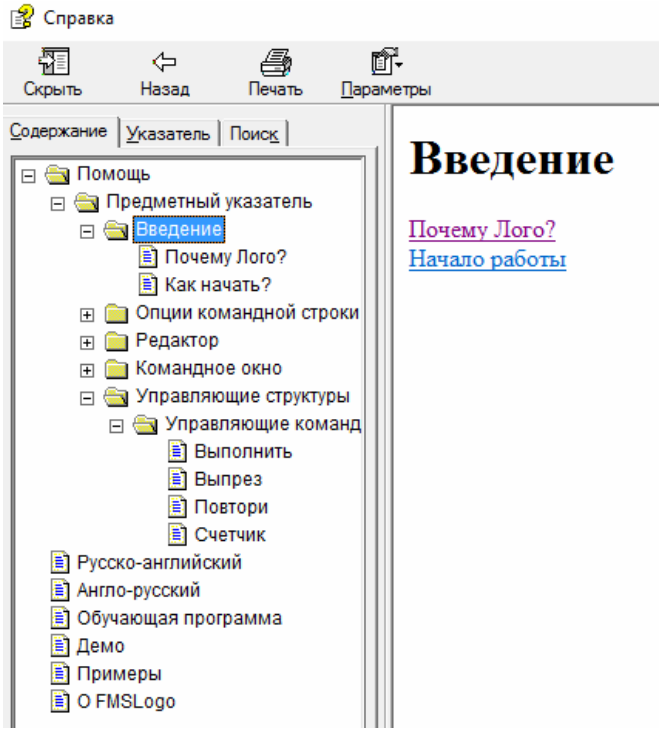


Рис. 3. Окно CHM-справки.

Пользовательский интерфейс справки состоит из кнопок: скрыть, назад, печать, параметры и вкладок: содержание, указатель, поиск , а также статей справки.

Рассмотрим процесс создания автономной справочной системы среды FMSLogo, структура которой представляет собой главную книгу – Помощь (рис. 3) с разделами:

1. Предметный указатель,
2. Русско-английский,
3. Англо-русский,
4. Обучающая программа,

5. Демо,
6. Примеры,
7. О FMSLogo.

К началу создания справки имеется набор из 9 html-файлов h01s01 – h01s07, соответствующих разделам перечисленным выше, файл Intro.html с заглавной статьей о справочной системе, файл Help.html – с оглавлением главной книги – Помощь. А также папки: logohelp, example, image. Logohelp содержит html-файлы со статьями для предметного указателя. Example содержит lgo-файлы с программами для раздела Примеры. Image содержит, используемые в системе графические файлы.

На первом шаге с помощью программы HTML HELP Workshop создается файл таблицы содержания с именем Table of contents.hhc.

На втором шаге – файл проекта с именем CodeBook.hhp.

На третьем – файл указателя с именем Index.hhk.

На четвертом шаге производится компиляция справки, которая сохраняется с именем CodeBook.chm.

Среда FMSLogo как инструментальное средство обучения

Одной из теоретических основ информатизация образования является идея конструктивизма. Конструктивизм исходит из того, что обучение – это активный процесс, в ходе которого люди активно конструируют знания на основе собственного опыта. Люди не получают идеи, а создают их. Опираясь на эту идею С. Пейперт сформулировал концепцию микромиров, представляющую собой по сути дела некоторые модели реального мира, которые с той или иной степенью детализации творит сам учащийся [5]. Поэтому, мы считаем, что первоначальной компьютерной средой, в том числе программирования, должна быть среда на языке мышления человека. Не вдаваясь в детали, заметим например, что базовые конструкции структурного программирования усваиваются гораздо глубже, если их смысл был понят на родном языке.

Особенности среды FMSlogo позволяют использовать его как инструментальное средство (как линейка, циркуль, калькулятор и др.) в изучении математики и многих других дисциплин. К таким особенностям относятся в частности:

- интерфейс командной строки, позволяющий программировать в тактовом режиме, что позволяет на начальном этапе работы в среде, а также при кодировании и отладке программ;
- Наличие графического исполнителя команд, названного нами Тортила (по англ. turtle) позволяет выполнять построение изображений на экране.

Считаем, что русификация интерфейса, базисных команд и функций, справочной системы позволит существенно расширить аудиторию , применяющих FMSLogo как инструментальное средство.

Заключение

Свободно распространяемая среда программирования FMSLogo (одна из реализаций языка Лого) локализована на ряд распространенных национальных языков, таких как немецкий, французский, испанский, итальянский, китайский и др. По мнению создателя языка Лого С. Пейперта, Лого-среда не должна служить заменой учителя или учебника, а служить инструментальным средством обучения. В таком качестве она должна быть доступна учащемуся на языке его мышления. По этой причине автор статьи выполняет полную локализацию среды программирования FMSLogo и применяет русифицированную FMSLogo в преподавании отдельных математических дисциплин. Нам представляется, что полная локализация существенно увеличит число преподавателей и учащихся, применяющих FMSLogo в учебном процессе как общеобразовательной, так и профессиональной школы.

Литература

1. Электронный ресурс – «Logo programming environment for Microsoft Windows». URL: http://fmslogo.sourceforge.net/ (Дата обращения 08.02.2019).
2. Баглаев И. И. Основы программирования в среде FMSLogo: учеб.-метод. пособие. - Улан-Удэ: Изд-во Бурят. гос. ун-та, 2016. –160 с.
3. Баглаев И. И. Русская локализация среды программирования FMSLogo // Материалы Байкальской региональной научно-практической конференции с международным участием «Инфокоммуникационные образовательные технологии: модели, методы, средства, ресурсы». 1-5 июля 2009 г. – Улан-Удэ, 2009. – С. 227–232.
4. Баглаев И.И. Использование локализованной среды программирования FMSLogo для решения задач компьютерной дифференциальной геометрии // Вестник Бурятского государственного университета. Теория и методика обучения – Вып. 15 – 2015 г. – С. 13–18
5. Пейперт С. Переворот в сознании: Дети, компьютеры и плодотворные идеи. – М.: Педагогика, 1989.— 224 с
6. Баглаев И.И. О переводе и адаптации среды программирования FMSLOGO на русский язык // XIX Ежегодная международная конференция-выставка ("ИТО-2009") 5-7 ноября 2009 года, г. Москва. – URL: http://www.ito.su/main.php?pid=26&fid=8159 (Дата обращения 08.02.19)

УДК 517.927.21

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© Базаргуроева Наталья Жаргаловна
студент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: bazarguroeva98@mail.ru

© Телешева Любовь Александровна
кандидат физико-математических наук,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: love_20_09@mail.ru

В данной статье рассматриваются нелокальные краевые условия для линейного дифференциального уравнения.
Ключевые слова: краевая задача; нелокальные условия; обыкновенное дифференциальное уравнение.

NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THIRD ORDER LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION

Natalia Zh. Bazarguroeva
Student
Buryat State Univerdity named after D. Banzarov
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: bazarguroeva98@mail.ru

Lyubov' A. Telesheva
Cand. Sci.(Phys. And Math.)
Buryat State Univerdity named after D. Banzarov
24a Smolina St., Ulan-Ude, 670000, Russia
E-mail: love_20_09@mail.ru

This article discusses non-local boundary conditions for a linear differential equation.
Keywords: boundary problem; nonlocal boundary problem; linear differential equation.

«Нелокальными краевыми задачами принято называть задачи, в которых вместо задания значений решения или его производных на фиксированной части границы задается связь этих значений со значениями тех же функций на иных внутренних или внешних многообразиях [1]». Исследования в этой области проводятся десятки лет и все результаты несут ценный вклад, как в теоретической, так и с практической точки зрения. Это обусловлено тем, что все процессы, что мы наблюдаем вокруг нас, описываются дифференциальными уравнениями. Библиографию всех работ не

счесть, например, приведу таких исследователей как Скубачевский А. Л. [5], Кожанов А. И.[2], Пинигина Н. Р.[4], Лукина Г. А.[2], Алдашев С. А. [1]. В данной работе исследовано существование регулярного решения для линейного дифференциального уравнения третьего порядка в пространстве $W_2^3(0,1)$.

Постановка первой краевой задачи

Найти функцию $u(x)$, являющуюся на интервале (0, 1) решением уравнения

$$u'''+a(x)u=f(x) \tag{1.1}$$

и такую, что выполняются условия:

$$u(0)=u(1)=0 \tag{1.2}$$

$$u'(1)=\alpha u(x_1), 0<x_1\le 1 \tag{1.3}$$

где $a(x), f(x)$ – известные функции, α – некоторое положительное число. Условия (1.2), (1.3) – граничные условия, где (1.3) – есть нелокальное граничное условие.

Введем обозначения для упрощения последующих вычислений.

$$R_1=\int_0^1 f^2(x)dx$$

$$R_2=\frac{1}{a_0}\left(\frac{1}{\delta_1^2}-\frac{1}{\delta_2^2}\right)\int_0^1 f^2(x)dx$$

где δ_1^2, δ_2^2 – есть положительные числа и a_0 – число, которое будет определено ниже.

Теорема. Пусть функции $a(x), f(x)$ такие, что:

$$a(x)\in C^3(0,1), f(x)\in L_2(0,1)$$

И выполняются условия:

$$3a'(x)-\max_{(0,1)}\left|a'''(x)\right|-a(1)\alpha^2\ge 0, \forall x\in(0,1) \tag{1.4}$$

$$\left(a(x)-\frac{\delta_1^2+\delta_2^2}{2}\right)\ge a_0>0, \forall x\in(0,1) \tag{1.5}$$

$$a(0) \geq 0 \qquad (1.6)$$

Тогда решение первой краевой задачи существует в пространстве $W_2^3(0,1)$.

Доказательство:

Для доказательства воспользуемся методом продолжения по параметру. Пусть $\lambda \in [0,1]$. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию $u(x)$, являющуюся на интервале (0,1) решением уравнения (1.1) и такую, что выполняются условия (1.2) и

$$u'(1) = \lambda \alpha u(x_1), 0 < x_1 \leq 1. \qquad (1.7)$$

Так как для метода продолжения по параметру необходимы «хорошие» априорные оценки покажем их наличие.

Рассмотрим следующее равенство:

$$\int_0^1 u'''^2 dx + \int_0^1 a(x) u u''' dx = \int_0^1 f(x) u''' dx$$

являющееся следствием из уравнения (1). Используя интегрирование по частям, неравенство Юнга и следующее неравенство:

$$u^2(x_1) \leq \int_0^1 u'^2 dx$$

Получаем первую априорную оценку:

$$\int_0^1 u'''^2 dx \leq R_1 \qquad (1.8)$$

Для получения следующей априорной оценки рассмотрим равенство:

$$\int_0^1 a(x) u^2 dx = \int_0^1 f(x) u dx - \int_0^1 u u''' dx$$

Воспользуемся неравенством Юнга в правой части, условия теоремы (1.5) и первую априорную оценку R_1. Получаем вторую «хорошую» априорную оценку:

$$\int_0^1 u^2 dx \leq R_2 \qquad (1.9)$$

Учитывая известное неравенство Пуанкаре — Фридрихса (из [2]) оценки на u' и u'' имеются. Наличие оценок (1.8) и (1.9) означает существование равномерной по λ априорной оценки решений задачи (1.1), (1.2), (1.7). Следовательно, задача (1.1), (1.2), (1.7) имеет при $\lambda = 1$ решение $u(x) \in W_2^3(0,1)$. Тогда существует решение $u(x) \in W_2^3(0,1)$ задачи (1.1), (1.2), (1.3). Подобным образом можно доказать существование решения второй краевой задачи.

Постановка второй краевой задачи

Найти функцию $u(x)$, являющуюся на интервале (0, 1) решением уравнения (1.1) и такую, что выполняются условия: (1.2) и

$$u'(x) = \frac{1}{\alpha - 1} \int_0^1 N(x)u(x)dx \qquad (1.10)$$

Где $a(x), f(x), N(x)$ – известные функции, α – некоторое положительное число, не равное единице, и условие (1.10) есть интегральное нелокальное условие.

Литература

1. Алдашев С. А. Нелокальные краевые задачи в цилинлрической области для многомерного уравнения Лапласа / С. А. Алдашев// Изв. Сарат. ун-та. - 2019. – №19. – С. 16-20.
2. Кожанов, А. И. Нелокальные задачи с интегральным условием для дифференциальных уравнений нечетного порядка / А. И. Кожанов, А. Г. Лукина //Сиб. электрон. матем. изв. - 2016. — №13. — С.452-466.
3. Ладыженская, О. А. Краевые задачи математической физики / О. А. Ладыженская. — М.: Наука, 1973. — 408с.
4. Пинигина Н. Р. Нелокальные по времени задачи для вырождающихся уравнений Соболевского типа /Н. Р. Пинигина // Вестн. НГУ, 2014. – Т. 14, №2. – С.49-62.
5. Скубачевский А. Л. Нелокальные краевые задачи со сдвигом / А. Л. Скубачевский // Матем. заметки, 1985. – Т. 38, №4. – С. 587-598.
6. Треногин, В. А. Функциональный анализ / В. А. Треногин. — М.: ФИЗМАЛИТ, 2002. — 488с.
7. Якубов С. Я. Линейные дифференциально-операторные уравнения и их приложения / С. Я. Якубов. - Баку: Элм, 1985. - 220с.

References

1. Aldashev S. A. Nonlocal boundary value problems in the cylindrical domain for the multidimensional Laplace equation/ S. A. Aldashev // Izv. Sarat. University. - 2019. - №19. – P. 16-20.

2. Kozhanov, A. I Nonlocal problems with an integral condition for differential equations of odd order / A. I. Kozhanov, A. G. Lukina // Sib. electron. Math Izv.. - 2016. - №13. - P.452-466.

3. Ladyzhenskaya O. A. Boundary problems of mathematical physics/ O. A. Ladyzhenskaya— M.: Science, 1973. — 408 p.

4. Pinigina N. R. Nonlocal in time problem dor degenerate Sobolev type equations / N. R. Pinigina // Vestn. NSU. – 2014/ - №14. – P. 49-62.

5. A. L. Skubachevsky Nonlocal boundary value problems with a shift / A. L. Skubachevsky // Mat. Notes. – 1985. - №38. – P. 587-598.

6. Trenogin V. A. Functional analysis/ V. A. Trenogin — M.: PHYSMATHLIT, 2002. — 488 p.

7. Yakubov S. Y. Linear operator differential equations / S. Y. Yakubov. — Baku: Элм, 1985. – 220 p.

УДК 519.642.5

k-ШАГОВЫЕ АЛГОРИТМЫ ДЛЯ ОДНОГО СЕМЕЙСТВА ИНТЕГРО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

© **Будникова Ольга Сергеевна**
кандидат физико-математических наук, доцент,
Иркутский государственный университет
Педагогический институт,
Россия, 664011, г. Иркутск, ул. Нижняя Набережная, 6
E-mail: osbud@mail.ru

© **Бороева Мария Николаевна**
старший преподаватель,
Иркутский государственный университет
Педагогический институт,
Россия, 664011, г. Иркутск, ул. Нижняя Набережная, 6
E-mail: masha888888@mail.ru

В работе рассмотрен класс линейных интегро-алгебраических уравнений, для которого сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного решения. Работ по качественной теории интегро-алгебраических уравнений мало, а численные методы практически не развиты. Так как многие методы, разработанные для численного решения интегральных уравнений Вольтерра, либо принципиально не применимы, либо приводят к расходящимся процессам. В статье предложены одно- и двухшаговые методы, основанные на экстраполяции первого слагаемого и на явных квадратурных формулах Адамса для интегрального слагаемого.
Ключевые слова: интегро-алгебраические уравнения; аппроксимация; квадратурные формулы; многошаговые методы.

MULTISTEP METHODS FOR NUMERICAL SOLUTION OF INTEGRAL-ALGEBRAIC EQUATIONS OF INDEX TWO

Olga S. Budnikova
Cand. Sci.(Phys. And Math.), A/Prof.,
Irkutsk State University,
6, Nizhnyaya Naberezhnaya, 664011, Russia
E-mail: osbud@mail.ru

Maria N. Botoroeva
Senior Lecturer,
Irkutsk State University,
6, Nizhnyaya Naberezhnaya, 664011, Russia
E-mail: masha888888@mail.ru

We are considered a class of linear integral-algebraic equations for which sufficient conditions for the existence of a unique continuous solution are formulated. Not much work was done on the qualitative theory of such equations, and virtually no numerical

[1] Исследование частично поддержано грантом РФФИ № 18-51-54001_Вьет_а.

algorithms for them have been developed. Since many methods which was constructed for Volterra integral equations or can't used absolutely or give rise to unstable processes. In the report one- and twostep methods are proposed. These methods are based on the Adam's quadrature rules and extrapolation formulas. As confirmation of the efficiency of the algorithms the results of numerical experiments are given.
Keywords: integral-algebraic equations; approximation; quadrature rule; multistep methods.

Постановка задачи.

Будем рассматривать систему интегральных уравнений вида

$$A(t)x(t)+\int_0^t K(t,s)x(s)ds=f(t),\ 0\le s\le t\le 1,\qquad A(t)\neq O,\det A(t)\equiv 0, \tag{1}$$

где $A(t)$ и $K(t,s)-(n\times n)$ - матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ – n-мерные известная и искомая вектор-функции. Предполагается, что элементы $A(t),K(t,s),f(t)$ обладают необходимой степенью гладкости.

Системы (1) принято называть интегро-алгебраическими уравнениями.

Под решением будем понимать любую непрерывную вектор-функцию $x(t)$ обращающую (1) в тождество.

Развитие качественной теории интегро-алгебраических уравнений началось относительно недавно. В первой работе [5] были сформулированы достаточные условия существования единственного непрерывного решения и предложен метод первого порядка точности. На данный момент исследованиями таких уравнений и разработкой методов их численного решения занимаются несколько научных групп: M. Hadizadeh с учениками (Иран) [8], H. Brunner (Гонконг) [6], Булатов М. В. и Чистяков В. Ф. (Россия) [5, 7]. Все работы посвящены отдельным классам уравнений.

На основе свойств матричных полиномов [3, 7] можно сформулировать достаточные условия существования единственного непрерывного решения:

Утверждение. Задача (1) имеет на отрезке [0,1] единственное решение $x(t)$ из класса $C^p_{[0,1]}$, если выполнены условия:

1. элементы $A(t),f(t)\in C^{p+2}_{[0,1]},K(t,s)\in C^{p+2}_{\Delta},\Delta=\{0\le s\le t\le 1\},p\ge 2$;
2. матричный полином $\lambda^2A(t)+\lambda K(t,t)+K'_t(t,t)$ имеет простую структуру на отрезке $[0,1]$;
3. $rank\,A(0)=rank\left[A(0)|f(0)\right]$;
4. $rank\,A(0)=rank\left[A(0)|\left(f'(0)-\left(A'(0)+K(0,0)\right)x(0)\right)\right]$.

Исследование задачи (1) значительно усложняется при нарушении второго условия, так как регулярность (сингулярность) матричного полинома не гарантирует единственности решения.

В заключение данного пункта отметим сложности численного решения ИАУ. Рассматриваемые в статье задачи имеют индекс два, то есть система

(1) включает в себя взаимосвязанные интегральные уравнения Вольтерра (ИУВ) второго рода, а также ИУВ первого рода видов:

$$\int_0^t y_2(s)ds = f_2(t),\ f_2(0) = 0. \tag{2}$$

$$\int_0^t (t-s)y_3(s)ds = f_3(t), f_3(0) = f_3'(0) = 0. \tag{3}$$

В работе [1] показано, что квадратурные методы, основанные на простейших формулах прямоугольников (правых, средних, левых) и трапеций являются сходящимися для модельного уравнения (2), а использование формул более высокого порядка точности, например, Грегори или Симпсона приводит к расходящимся процессам [9]. Позже в [4] было показано, что ряд эффективных явных многошаговых методов для модельного уравнения (3) являются расходящимися для (2).

Численные методы.

При численном решении задачи (1) для интегрального слагаемого предлагается применять многошаговые методы, основанные на явной квадратурной формуле Адамса [4, 9], так как они устойчивы для ИУВ первого рода. Но напрямую их применять нельзя, так как это приведет к проблемам решения вырожденной СЛАУ:

$$A_{i+1}x_{i+1} + h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1},\ \ i = k,...,N-1.$$

Стартовые значения $x_0, x_1,...,x_{k-1}$ считаются заранее вычисленными с необходимой степенью точности.

Приведем модификацию методов Адамса [2]. Будем вычислять первое слагаемое как значение интерполяционного полинома степени k $L_{k+1}^i(x_{i-k}, x_{i-k+1},...,x_i, t)$ в точке $t = t_{i+1}$.

Учитывая выше сказанное, предлагаемые методы будут иметь вид:

$$A_{i+1}\sum_{j=0}^{k}\alpha_j x_{i-j} + h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1},\ i = k,...,N-1. \tag{4}$$

Например, одно- и двухшаговые методы имеют вид:

$$A_{i+1}(2x_i - x_{i-1}) + h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1},$$

$$A_{i+1}(3x_i - 3x_{i-1} + x_{i-2}) + h\sum_{l=0}^{i}\omega_{i+1,l}K_{i+1,l}x_l = f_{i+1}.$$

Коэффициенты $\omega_{i+1,l}$ для $k = 1,2$:

$$\omega_{i+1,l}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}4&&&&&\\3&3&&&&\\3&2&3&&&\\3&2&2&3&&\\3&2&2&2&3&\\..&..&..&..&..&..\end{pmatrix},\ \omega_{i+1,l}=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}9&0&27&&&&\\9&5&11&23&&&\\9&5&16&7&23&&\\9&5&16&12&7&23&\\9&5&16&12&12&7&23\\...&...&...&...&...&...&...\end{pmatrix}.$$

При приближенном вычислении интегралов для нечетных k коэффициент $\omega_{i+1,0}=0,$ поэтому здесь при $k=1$ первый нулевой столбец опущен.

Приведем результаты численных расчетов предложенными методами тестового ИАУ имеющего точное решение: $x(t)=\begin{pmatrix}e^t & e^{-t} & e^{2t}\end{pmatrix}^T,\ t\in[0,1].$

$$\begin{pmatrix}1&t&t^2\\t&t^2&t^3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\x_2(t)\\x_3(t)\end{pmatrix}+\int_0^t\begin{pmatrix}\frac{e^t}{e^s}&0&0\\\frac{1}{e^{2s}}&e^{t+s}&0\\0&0&\frac{(t-s)}{e^{2s}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(s)\\x_2(s)\\x_3(s)\end{pmatrix}ds=\begin{pmatrix}e^t(t+1)+\frac{t}{e^t}+t^2e^{2t}\\2te^t+\frac{(t^2-1)}{e^t}+t^3e^{2t}+1\\\frac{t^2}{2}\end{pmatrix}.$$

Результаты численных экспериментов приведены в таблице 2.

Таблица 2.

h	Одношаговый метод		Двухшаговый метод	
	err	p	err	p
0.2	0.7363	1.95	0.20987	2.62
0.1	0.1903	1.94	0.03419	2.92
0.05	0.0497	1.96	0.00452	2.89
0.025	0.0128	2.0	0.00061	2.93

Результаты численных расчетов показывают, что предложенные методы сходятся к точному решению с порядком k при $k\le 2$, здесь err - погрешность вычисления по евклидовой норме и порядок метода определен по формуле

$$p=\log_2\frac{err_h}{err_{h/2}}.$$

В дальнейшем планируется получить условия существования единственного непрерывного решения более сложного класса задач и разработать алгоритмы их численного решения.

Литература

1. Апарцин А. С., Бакушинский А. Б. Приближенное решение интегральных уравнений Вольтерра I рода методом квадратур // Дифференциальные и интегральные уравнения. Иркутск: Иркутский государственный университет, 1972. Вып. 1. С. 248–258.

2. Будникова О. С., Булатов М. В. Численное решение интегро-алгебраических уравнений многошаговыми методами // Журнал вычислительной

математики и математической физики. 2012. Т. 52, № 5. С. 829–839. DOI: 10/1134/S0965542512050041.

3. Булатов М. В., Чистякова Е. В. Об одном семействе вырожденных интегродифференциальных уравнений // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2011. Т. 51, № 9. С. 1665–1673. DOI: 10.1134/S0965542511090065.

4. Тен Мен Ян Приближенное решение линейных интегральных уравнений Вольтерра I рода: дис. … канд. физ. мат. наук. Иркутск, 1985. 215 с.

5. Чистяков В. Ф. О сингулярных системах обыкновенных дифференциальных уравнений и их интегральных аналогах // Функции Ляпунова и их применения. Новосибирск: Наука, 1987. С. 231–239.

6. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. Unversity Press. Cambridge, 2004. 612 p.

7. Bulatov M. V., Lee M. G. Application of matrix polynomials to the analysis of linear differential algebraic equations of higher order // Differential Equations. 2008. Vol. 44. Pp. 1353–1360.

8. Hadizadeh M., Ghoreishi F., Pishbin S. Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index-2 // Applied Numerical Mathematics. 2011. Vol. 61, № 1. Pp. 131–148. DOI: 10.1016/j.apnum.2010.08.009.

9. Linz P. Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. SIAM, Philadelphia, 1985. 227 p. DOI: 10.1137/1.9781611970852.

References

1. Apartsin A. S., Bakushinskiy A. B. Priblizhennoe reshenie integralnyih uravneniy Volterra I roda metodom kvadratur [Numerical Solution of Volterra Integral Equations of the First Kind by Quadrature Methods]. Differentsialnyie i integralnyie uravneniya – Differential and integral equations. Irkutsk: Irkutsk State University, 1972. V. 1. Pp. 248–258.

2. Budnikova O. S., Bulatov M. V. Numerical Solution of Integral-Algebraic Equations for Multistep Methods // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2012. Vol. 52, No 5. Pp. 691–701. DOI: 10/1134/S0965542512050041.

3. Bulatov M. V., Chistyakova E. V. On a Family of Singular Integro-Differential Equations // Computational Mathematics and Mathematical Physics. 2011. Vol. 51, No 9. Pp. 1558–1566. DOI: 10.1134/S0965542511090065.

4. Ten Men Yan Approximate Solution of Linear Volterra Integral Equations of the First Kind [Priblizhennoe reshenie lineynyih integralnyih uravneniy Volterra I roda]: Candidate's Dissertation in Mathematics and Physics. Irkutsk, 1985. 215 p.

5. Chistyakov V. F. O singulyarnyih sistemah obyiknovennyih differentsialnyih uravneniy i ih integralnyih analogah [On Singular Systems of Ordinary Differential Equations and their Integral Analogues]. Funktsii Lyapunova i ih primeneniya – Lyapunov functions and their applications. Novosibirsk: Nauka, 1987. Pp. 231–239.

6. Brunner H. Collocation Methods for Volterra Integral and Related Functional Equations. Unversity Press. Cambridge, 2004. 612 p.

7. Bulatov M. V., Lee M. G. Application of matrix polynomials to the analysis of linear differential algebraic equations of higher order // Differential Equations. 2008. Vol. 44. Pp. 1353–1360.

8. Hadizadeh M., Ghoreishi F., Pishbin S. Jacobi spectral solution for integral algebraic equations of index-2 // Applied Numerical Mathematics. 2011. Vol. 61, № 1. Pp. 131–148. DOI: 10.1016/j.apnum.2010.08.009.

9. Linz P. Analytical and Numerical Methods for Volterra Equations. SIAM, Philadelphia, 1985. 227 p. DOI: 10.1137/1.9781611970852.

УДК 519.62

О БЛОЧНЫХ МЕТОДАХ ДЛЯ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ[1]

© Булатов Михаил Валерьянович
доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник
Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134
E-mail: mvbul@icc.ru

© Ву Хоанг Линь
доктор физико-математических наук, доцент
Вьетнамский национальный университет
Вьетнам, Ханой, ул. Нгуен Трай, 334
E-mail: linhvh@vnu.edu.vn

© Соловарова Любовь Степановна
кандидат физико-математических наук, младший научный сотрудник
Институт динамики систем и теории управления
имени В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134
E-mail: soleilu@mail.ru

В статье рассмотрены системы обыкновенных дифференциальных уравнений с тождественно вырожденной матрицей перед производной (дифференциально-алгебраические уравнения). Предполагается, что для таких систем начальное условие задано корректно. Приведены необходимые определения из теории решения дифференциально-алгебраических уравнений и подчеркнуты сложности численного решения таких задач. Приведено построение многошаговых многостадийных (блочных) методов для решения дифференциально-алгебраических уравнений индекса не выше двух.
Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения, разностные схемы, индекс, многошаговые методы.

ON BLOCK METHODS FOR INITIAL-VALUE PROBLEM IN DIFFERENTIAL-ALGEBRAIC EQUATIONS

Mikhail V. Bulatov
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Chief Researcher
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS
Lermontov St., 134, Irkutsk, 664033, Russia

Vu Hoang Linh
Dr. habil., Associate Professor
Vietnam National University
334, Nguyen Trai, Thanh Xuan, Hanoi, Vietnam

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-51-54001.

Liubov S. Solovarova
Cand. Sci. (Phys. and Math.), Junior Researcher
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory SB RAS
Lermontov St., 134, Irkutsk, 664033, Russia

Systems of ordinary differential equations with an identically singular matrix at the leading part are considered in the article. The initial condition is supposed to be consistent with the right hand side. Necessary definitions from the theory of solving differential-algebraic equations are given and difficulties of the numerical solution of such problems are shown. The construction of multistep multistage methods are given for differential-algebraic equations of index at most 2.
Keywords: differential-algebraic equations, difference schemes, index, multistep methods.

1. Постановка задачи

Ряд математических моделей, описывающих природные и технические процессы, представляет собой взаимосвязанные системы обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) и конечномерных уравнений. Такие задачи можно записать в виде системы ОДУ с тождественно вырожденной матрицей перед производной. В этом случае их принято называть дифференциально-алгебраическими уравнениями (ДАУ).

Итак, рассмотрим линейное ДАУ

$$A(t)x'(t) + B(t)x(t) = f(t),\ t \in [0,1], \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где $A(t)$ и $B(t)$ – $(n \times n)$-матрицы, $f(t)$ и $x(t)$ – заданная и искомая n-мерные вектор-функции, причем $\det A(t) \equiv 0$. Предполагается, что для ДАУ (1) начальное условие (2) согласовано с правой частью, т.е. рассматриваемая задача имеет достаточно гладкое решение.

Характеристикой сложности ДАУ является понятие индекса, которое имеет несколько определений. В случае вещественно-аналитических коэффициентов матриц $A(t)$, $B(t)$ эти определения эквивалентны [1].

Определение 1[1]. Система (1) имеет семейство решений типа Коши, если существует линейная комбинация

$$x(t) = \Phi(t)c + \int_0^t K_0(t,\tau) f(\tau) d\tau + \sum_{j=0}^{r} K_j(t) f^{(j-1)}(t), \tag{3}$$

где $\Phi(t)$, $K_0(t,\tau), K_1(t), \ldots, K_r(t)$ – $(n \times n)$-матрицы, $rank\Phi(t) = r = const\ \forall t \in [0,1], c \in R^n$, которая обращает (1) в тождество, и на любом интервале $[\alpha,\beta] \subseteq [0,1]$ нет решений, отличных от (3). В этом случае r принято называть индексом исходной системы (1).

Если $r \geq 2$, то такие задачи принято называть ДАУ высокого индекса. Разработка методов численного решения таких задач и жестких ДАУ индекса один наталкивается на большие трудности. Для иллюстрации вышесказанного приведем пример.

Пример 1[2].

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha t \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u'(t) \\ v'(t) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1+\alpha \\ 1 & \alpha t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \end{pmatrix},$$

где α – числовой параметр. Данный пример имеет единственное решение $u(t)=g(t)-\alpha tv$, $v(t)=f(t)-g'(t)$. Индекс данного ДАУ равен 2.

Зададим на отрезке интегрирования $[0,1]$ сетку $t_i=ih$, $i=0,1,...,N$, $N=1/h$ и обозначим $A_i=A(t_i)$, $B_i=B(t_i)$, $f_i=f(t_i)$, $x_i\approx x(t_i)$.

Применим для данного примера неявный метод Эйлера, который имеет вид $A_{i+1}(x_{i+1}-x_i)+hB_{i+1}x_{i+1}=\psi_{i+1}$, где $\psi_{i+1}=h(f(t_{i+1}),g(t_{i+1}))^T$, $x_{i+1}=(u_{i+1},v_{i+1})^T\approx(u(t_{i+1}),v(t_{i+1}))^T$, $u_0=f(0)-g'(t)\big|_{t=0}$, $u_0=g(0)$.

Опуская выкладки, получим

$$u_{i+1}=g_{i+1}-\alpha t_{i+1}v_{i+1},\ v_{i+1}=\frac{\alpha}{1+\alpha}v_i+\frac{1}{1+\alpha}(f_{i+1}-\frac{g_{i+1}-g_i}{h}).$$

Если $\left|\frac{\alpha}{1+\alpha}\right|<1$, т.е. при $\alpha<-0.5$ будем иметь неустойчивый процесс.

Так как качественные свойства ДАУ значительно отличаются от свойств ОДУ, разрешенных относительно производной, то данное обстоятельство во многом определяет сложность разработки и применения численных методов решения ДАУ. Принципиально нельзя применять явные разностные схемы (в силу вырожденности матрицы перед производной), а неявные схемы могут быть неустойчивыми. Другие направления теории численного решения ДАУ (так называемые "расширенные системы" [1], и подходы, основанные на различных полуобратных матрицах и проекторах [3]) трудны в реализации и не всегда применимы. Таким образом, существует необходимость разработки эффективных методов численного решения ДАУ.

2. Блочные методы

Блочные многошаговые многостадийные методы строятся на основе иной записи исходной задачи [4]

$$(A(t)x(t))'+(B(t)-A(t))x(t)=f(t),\ x(0)=x_0,\ t\in[0,1], \qquad (4)$$

Применим к (4) неявный метод Эйлера. Тогда имеем

$$(A_{i+1}x_{i+1}-A_ix_i)+h(B_{i+1}-A'_{i+1})x_{i+1}=$$
$$=(A_{i+1}-hA'_{i+1})x_{i+1}-A_ix_i+hB_{i+1}x_{i+1}=hf_{i+1},\ i=0,1,...,N-1.$$

Учитывая $A_{i+1}-hA'_{i+1}\approx A_i$ и заменяя A_i на $A_{i+1}-hA'_{i+1}$ в данном выражении, получим частный случай блочных схем

$$A_i(x_{i+1}-x_i)+hB_{i+1}x_{i+1}=hf_{i+1},$$

схему первого порядка [4].

Приведем построение интерполяционного случая блочных схем для задачи (4). Пусть $L(y_0,y_1,...,y_{k+s-1},t)$ – интерполяционный полином степени $k+s-1$, проходящий через точки $(y_0,t_0),(y_1,t_1),\ldots,(y_{k+s-1},t_{k+s-1})$,

$t \in [t_0, t_{k+s-1}], t_j = jh$, $j = 0,1,...,k+s-1$. Тогда можно записать

$$L'(y_0, y_1, y_{k+s-1}, t)_{t=t_{k+j}} = \frac{1}{h} \sum_{l=0}^{k+s-1} \rho_l^j y_j, \ j = 0,1,...,s-1.$$

Основываясь на этих формулах, выпишем блочные методы для численного решения задачи

$$(A(t)x(t))' + C(t)x(t) = f(t), \ x(0) = x_0, \ t \in [0,1], \tag{5}$$

где $C(t) = B(t) - A'(t)$.

Пусть заранее заданы (вычислены) стартовые значения $x_i \approx x(t_i)$, $t_j = jh$, $j = 0,1,...,k-1$. Тогда $x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+s}$ будем находить из следующей системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} \sum_{j=0}^{k+s-1} \rho_j^s A_{i+s-j} x_{i+s-1} + hC_{i+s} x_{i+s} = hf_{i+s}, \\ \qquad\qquad ... \\ \sum_{j=0}^{k+s-1} \rho_j^2 A_{i+s-j} x_{i+s-1} + hC_{i+2} x_{i+2} = hf_{i+2}, \\ \sum_{j=0}^{k+s-1} \rho_j^1 A_{i+s-j} x_{i+s-1} + hC_{i+1} x_{i+1} = hf_{i+1}. \end{cases} \tag{6}$$

При реализации данных схем мы продвигаемся сразу на s шагов, т.е. вычисляем $x_{i+1}, x_{i+2}, ..., x_{i+s}$ по заранее определенным $x_{i+1-k,}, ..., x_i$. Частный случай методов (6) (при $s = 1$) рассмотрен в [5].

Литература

1. Чистяков В.Ф. Алгебро-дифференциальные операторы с конечномерным ядром. — Новосибирск: Наука, 1996.—280 с.

2. Brenan K.F., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical solution of Initial-Value Problems in Differental-Algebraic Equations — Philadelphia:Appl. Math., 1996. — 270 pp.

3. Lamour R., März R., Tischendorf C.: Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis. —Springer, 2013.

4. Булатов М.В., Минг-Гонг Ли, Соловарова Л.С. О разностных схемах первого и второго порядков для дифференциально-алгебраических уравнений индекса не выше двух//Ж. вычисл. матем. и матем. физ. 2010. Т.50. №11. С.1909–1918.

5. Bulatov M.V., Linh V.H., Solovarova L.S. On BDF-based multistep schemes for some classes of linear differential-algebraic equations of index at most 2//Acta Math. Vietnam. 2016. V.41. №4. P.715–730. DOI:10.1007/s40306-016-0171-2.

References

1. Chistyakov V.F. Differential-Algebraic Operators with Finite-Dimensional Kernels. Novosibirsk: Nauka, 1996.

2. Brenan K.F., Campbell S.L., Petzold L.R. Numerical solution of Initial-Value Problems in Differental-Algebraic Equations — Philadelphia:Appl. Math., 1996. — 270 pp.

3. Lamour R., März R., Tischendorf C.: Differential-Algebraic Equations: A Projector Based Analysis. —Springer, 2013.

4. Bulatov M.V., Lee Ming-Gong, Solovarova L.S. On first and second-order difference schemes for differential-algebraic equations of index at most two// Comput. Math. Math. Physics. 2010. V.50. No. 11. Pp.1808–1817.

5. Bulatov M.V., Linh V.H., Solovarova L.S. On BDF-based multistep schemes for some classes of linear differential-algebraic equations of index at most 2//Acta Math. Vietnam. 2016. V.41. №4. P.715–730. DOI:10.1007/s40306-016-0171-2.

УДК 517.977

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ УЛУЧШЕНИЯ И ОПТИМИЗАЦИИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ[1]

© Булдаев Александр Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: buldaev@mail.ru

Рассматривается новый подход к оптимизации управляемых нелинейных систем, основывающийся на представлении условий оптимальности и улучшения управления в форме дифференциально-алгебраических краевых задач. Предлагаются методы решения краевых задач на основе построения и поиска неподвижных точек специальных операторов управления. Эффективность предлагаемых методов иллюстрируется на расчетах модельных и тестовых задач оптимального управления.
Ключевые слова: задача оптимального управления, условия улучшения и оптимальности управления, дифференциально-алгебраические краевые задачи, операторы управления, численные алгоритмы.

BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR IMPROVING AND OPTIMIZING CONTROLLED SYSTEMS

Aleksandr S. Buldaev
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: buldaev@mail.ru

A new approach to the optimization of controlled nonlinear systems is considered, which is based on the representation of optimality conditions and improvement of control in the form of differential-algebraic boundary value problems. Methods for solving boundary value problems based on the construction and search for fixed points of special control operators are proposed. The effectiveness of the proposed methods is illustrated in the calculations of model and test problems of optimal control.
Keywords: optimal control problem, control improvement and optimality conditions, differential-algebraic boundary value problems, control operators, numerical algorithms.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 18-41-030005-р_а; МОН РФ, проект 1.5049.2017/БЧ.

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ УЛУЧШЕНИЯ УПРАВЛЕНИЯ В СИСТЕМАХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

© Бурлаков Иван Дмитриевич
ассистент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: ivan.burlakov.91@mail.ru

Рассматривается новый подход для построения улучшающего допустимого управления в классе задач оптимального управления с ограничениями. Подход основывается на построении системы условий нелокального улучшения допустимого управления в виде дифференциально-алгебраической краевой задачи. Для решения краевой задачи предлагается переход к задаче о неподвижной точке оператора управления. Конструируются численные алгоритмы решения задачи о неподвижной точке. Приводятся результаты численных расчетов модельных и тестовых задач оптимального управления и дается сравнительный анализ эффективности предлагаемого метода.
Ключевые слова: задача оптимального управления с ограничениями, краевая задача улучшения управления, задача о неподвижной точке, численный алгоритм.

ABOUT ONE METHOD OF IMPROVING CONTROL IN SYSTEMS WITH CONSTRAINTS

Ivan D. Burlakov
research scientist,
Buryat State University named after D. Banzarov
24a Smolina St., 670000, Ulan-Ude, Russia
E-mail: ivan.burlakov.91@mail.ru

A new approach for constructing an improving admissible control in the class of optimal control problems with constraints is considered. The approach is based on the construction of a system of conditions for nonlocal improvement of admissible control in the form of a differential-algebraic boundary value problem. To solve the boundary value problem, we propose a transition to the fixed point problem of the control operator. Numerical algorithms for solving the fixed point problem are constructed. The results of numerical calculations of model and test problems of optimal control are given and the comparative analysis of efficiency of the offered method is given.

1. Постановка задачи

Рассматриваемый подход является развитием и расширением нелокальных методов улучшения управления, первоначально разработанных в [1] для линейных по состоянию задач оптимального управления. Далее были разработаны методы краевых задач и методы неподвижных точек для улучшения управления в различных классах нелинейных задач оптимального управления [2-5]. В данной работе

предлагается модификация метода краевых задач для улучшения управления в задачах с ограничениями, обеспечивающая точное выполнение ограничений.

Рассматривается класс задач с ограничениями, приводимых к следующему общему виду:

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),\omega,t),\ x(t_0) = x^0, \tag{1}$$

$$u(t) \in U,\ \omega \in W,\ t \in T = [t_0,t_1],$$

$$\Phi_0(\sigma) = \varphi_0(x(t_1),\omega) + \int_T F_0(x(t),u(t),\omega,t)dt \to \inf_{\sigma\in\Omega}, \tag{2}$$

$$\Phi_1(\sigma) = \varphi_1(x(t_1),\omega) = 0, \tag{3}$$

в котором $x(t) = (x_1(t),...,x_n(t))$ – вектор состояния, $u(t) = (u_1(t),...,u_m(t))$ – вектор управляющих функций, $\omega = (\omega_1,...,\omega_l)$ - вектор управляющих параметров. Множества $U \subseteq R^m$, $W \subseteq R^l$ компактны и выпуклы. Интервал T фиксирован. В качестве доступных управляющих функций рассматривается множество V кусочно-непрерывных на T функций со значениями в множестве U. $\sigma = (u,\omega)$ - доступное управление со значениями в множестве $\Omega = V \times W$. Функции $\varphi_0(x,\omega)$, $\varphi_1(x,\omega)$ непрерывно-дифференцируемы на $R^n \times W$, функции $F_0(x,u,\omega,t)$, $f(x,u,\omega,t)$ и их частные производные по x, u, ω непрерывны по совокупности аргументов на множестве $R^n \times U \times W \times T$.

Условия гарантируют существование и единственность решения $x(t,\sigma)$, $t \in T$ системы (1) для любого доступного управления $\sigma \in \Omega$. Доступное управление $\sigma \in \Omega$ называется допустимым, если выполняется функциональное ограничение (3). Множество допустимых управлений обозначим $D = \{\sigma \in \Omega : \Phi_1(\sigma) = \varphi_1(x(t_1),\omega) = 0\}$.

К виду (1)-(3) могут быть приведены задачи оптимального управления с терминальными, фазовыми и смешанными ограничениями, в том числе с нефиксированным временем.

Для задачи (1)-(3) рассмотрим вспомогательную задачу без ограничений на основе известного принципа расширения [6] с функционалом

$$J(\sigma) = \varphi(x(t_1),\omega) + \int_T F(x(t),u(t),\omega,t)dt \to \inf_{\sigma\in\Omega}, \tag{4}$$

в которой функционал расширения определяется условием

$$J(\sigma) \le \Phi_0(\sigma),\ \sigma \in D \subset \Omega.$$

В качестве иллюстрации функционала расширения можно рассматривать штрафные функционалы за нарушение ограничения (3). В частности, функционал с квадратичным штрафом

$$M(\sigma) = \Phi_0(\sigma) + \mu\Phi_1^2(\sigma) \to \inf_{\sigma\in\Omega}, \qquad \mu > 0.$$

Другим актуальным примером функционала расширения является регулярный функционал Лагранжа

$$L(\sigma) = \Phi_0(\sigma) + \lambda\Phi_1(\sigma) \to \inf_{\sigma\in\Omega}, \qquad \lambda \in R.$$

Рассмотрим задачу улучшения доступного управления в задаче (1), (4): для заданного доступного управления $\sigma^I \in \Omega$ требуется найти доступное управление $\sigma \in \Omega$ с условием

$$\Delta_\sigma J(\sigma^I) = J(\sigma) - J(\sigma^I) \le 0.$$

В соответствии с [4], проекционные условия улучшения доступного управления $\sigma^I \in \Omega$ на основе оператора проектирования определяются следующим образом.

Далее будем использовать следующее обозначение частного приращения произвольной вектор-функции $g(y_1,...,y_l)$ по переменным y_{s_1}, y_{s_2}

$$\Delta_{y_{S_1}+\Delta y_{S_1}, y_{S_2}+\Delta y_{S_2}} g(y_1,...,y_l) = \\ = g(y_1,...,y_{s_1}+\Delta y_{s_1},...,y_{s_2}+\Delta y_{s_2},...,y_l) - g(y_1,...,y_l).$$

Дополнительно обозначим $\Delta x(t) = x(t,\sigma) - x(t,\sigma^I)$, $\Delta u(t) = u(t) - u^I(t)$, $\Delta\omega = \omega - \omega^I$, $\Delta a = a - a^I$.

P_Y - оператор проектирования на множество $Y \subset R^k$ в евклидовой норме

$$P_Y(z) = \arg\min_{y\in Y}(\|y - z\|), \qquad z \in R^k.$$

Введем модифицированную дифференциально-алгебраическую сопряженную систему, включающую дополнительную фазовую переменную $y(t) = (y_1(t),...,y_n(t))$,

$$\dot p(t) = -H_x(p(t),x(t),u(t),\omega,t) - r(t), \tag{5}$$

$$\langle H_x(p(t),x(t),u(t),\omega,t) + r(t), y(t) - x(t)\rangle = \Delta_{y(t)} H(p(t),x(t),u(t),\omega,t) \tag{6}$$

с краевыми условиями

$$p(t_1) = -\varphi_x(x(t_1),\omega) - q, \tag{7}$$

$$\langle \varphi_x(x(t_1),\omega) + q, y(t_1) - x(t_1)\rangle = \Delta_{y(t_1)}\varphi(x(t_1),\omega), \tag{8}$$

в которой по определению полагаем $r(t) = 0$, $q = 0$ в случае линейности функций f, F, φ по x (линейная по состоянию задача (1), (4)), а также в случае $y(t) = x(t)$ при соответствующих $t \in T$.

В нелинейной по состоянию задаче (1),(4) алгебраические уравнения (6) и (8) всегда можно аналитически разрешить относительно величин $r(t)$ и q в виде явных или условных формул (возможно, не единственным образом).

Для доступных управлений $\sigma \in \Omega$, $\sigma^I \in \Omega$ обозначим $p(t,\sigma^I,\sigma)$, $t \in T$ - решение модифицированной сопряженной системы (5)-(8) при $x(t) = x(t,\sigma^I)$, $y(t) = x(t,\sigma)$, $u(t) = u^I(t)$, $\omega = \omega^I$. Из определения следует очевидное равенство $p(t,\sigma,\sigma) = \psi(t,\sigma)$, $t \in T$.

Проекционные условия улучшения доступного управления $\sigma^I \in \Omega$ с заданным параметром проектирования $\alpha > 0$ в соответствии с [4] имеют вид специальной дифференциально-алгебраической краевой задачи:

$$\dot{x}(t) = f(x(t),u(t),\omega,t), \quad x(t_0) = x^0, \tag{9}$$

$$\dot{p}(t) = -H_x(p(t),x^I(t),u^I(t),\omega^I,t) - r(t), \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &\left\langle H_x(p(t),x^I(t),u^I(t),\omega^I,t) + r(t), x(t) - x^I(t) \right\rangle = \\ &\qquad = \Delta_{x(t)} H(p(t),x^I(t),u^I(t),\omega^I,t) \end{aligned} \tag{11}$$

$$p(t_1) = -\varphi_x(x^I(t_1),\omega^I) - q, \tag{12}$$

$$\left\langle \varphi_x(x^I(t_1),\omega^I) + q, x(t_1) - x^I(t_1) \right\rangle = \Delta_{x(t_1)} \varphi(x^I(t_1),\omega^I), \tag{13}$$

в которой

$$u(t) = P_U(u^I(t) + \alpha(H_u(p(t),x(t),u^I(t),\omega^I,t) + s_1(t))), \ t \in T, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} &\Delta_{u(t)} H(p(t),x(t),u^I(t),\omega^I,t) = \\ &= \left\langle H_u(p(t),x(t),u^I(t),\omega^I,t) + s_1(t), u(t) - u^I(t) \right\rangle, \end{aligned} \tag{15}$$

$$\omega = P_W(\omega^I + \alpha(-\varphi_\omega(x(t_1),\omega^I) + \int_T H_\omega(p(t),x(t),u(t),\omega^I,t)dt + s_2)), \tag{16}$$

$$\begin{aligned} &\Delta_\omega\{-\varphi(x(t_1),\omega^I) + \int_T H(p(t),x(t),u(t),\omega^I,t)dt\} = \\ &= \left\langle \ -\varphi_\omega(x(t_1),\omega^I) + \int_T H_\omega(p(t),x(t),u(t),\omega^I,t)dt + s_2, \omega - \omega^I \ \right\rangle \end{aligned} \tag{17}$$

и для удобства обозначено $x^I(t) = x(t,\sigma^I)$, $t \in T$.

В уравнении (15) по определению полагается $s_1(t) = 0$ в случае линейности функций f, F по u (линейная по управляющей функции u задача (1), (4)), или в случае $u(t) = u^I(t)$ при $t \in T$, $t \in T$. Аналогично в уравнении (17) по определению полагается $s_2 = 0$ в случае линейности функций f, F, φ по ω (линейная по параметру ω задача (1), (4)), а также для $\omega = \omega^I$.

Предположим, что решение $(x(t),p(t))$, $t \in T$ дифференциально-алгебраической краевой задачи (9) – (17) существует (возможно, не единственное). Сформируем соответствующее выходное управление $\sigma = (u,\omega)$ по правилам проектирования (14)-(17), причем управляющая функция $u(t)$, $t \in T$ является кусочно-непрерывной. Тогда, согласно [4], решение $\sigma = (u,\omega)$ задачи (9)-(17) обеспечивает улучшение управления

$\sigma^I \in \Omega$ для любого параметра $\alpha > 0$ с оценкой улучшения функционала:

$$\Delta_\sigma J(\sigma^I) \le -\frac{1}{\alpha}\int_T \left\| u(t) - u^I(t) \right\|^2 dt - \frac{1}{\alpha}\left\| \omega - \omega^I \right\|^2 .$$

При этом улучшение управления гарантируется не только в достаточно малой окрестности исходного управления $\sigma^I \in \Omega$ (свойство нелокальности улучшения управления).

Для эффективного решения краевой задачи (9)-(17), сформированной в пространстве фазовых и сопряженных переменных, предлагается переход к эквивалентной системе в пространстве управлений:

$$u(t) = P_U(u^I(t) + \alpha(H_u(p(t,\sigma^I,\sigma), x(t,\sigma), u^I(t), \omega^I, t) + s_1(t))), \ t \in T, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &\Delta_{u(t)} H(p(t,\sigma^I,\sigma), x(t,\sigma), u^I(t), \omega^I, t) = \\ &= \left\langle H_u(p(t,\sigma^I,\sigma), x(t,\sigma), u^I(t), \omega^I, t) + s_1(t), u(t) - u^I(t) \right\rangle, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &\omega = P_W(\omega^I + \alpha(-\varphi_\omega(x(t_1,\sigma),\omega^I) + \\ &+ \int_T H_\omega(p(t,\sigma^I,\sigma), x(t,\sigma), u(t), \omega^I, t)dt + s_2)), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &\Delta_\omega\{-\varphi(x(t_1,\sigma),\omega^I) + \int_T H(p(t,\sigma^I,\sigma), x(t,\sigma), u(t), \omega^I, t)dt\} = \\ &= \left\langle \ -\varphi_\omega(x(t_1,\sigma),\omega^I) + \int_T H_\omega(p(t,\sigma^I,\sigma), x(t,\sigma), u(t), \omega^I, t)dt + s_2, \omega - \omega^I \ \right\rangle \end{aligned} \quad (21)$$

Эквивалентность краевой задачи (9)-(17) и системы уравнений (18)-(21) понимается в следующем смысле. Пусть пара $(x(t), p(t))$, $t \in T$, является решением краевой задачи (9)-(17). Тогда управление $\sigma = (u, \omega)$, формируемое по указанному выше правилу, является решением системы (18)-(21). Наоборот, пусть допустимое управление $\sigma = (u, \omega)$ является решением системы (18)-(21). Тогда пара $(x(t,\sigma), p(t,\sigma^I,\sigma))$, $t \in T$ является решением краевой задачи (9)-(17).

Уравнения (19) и (21) всегда можно однозначно разрешить относительно величин $s_1(t)$ и s_2 (возможно, не единственным образом). Таким образом, можно свести условия (18)-(21) к приведенной системе уравнений относительно вектора $\sigma = (u, \omega)$ с однозначно определяемой правой частью. Полученную систему можно интерпретировать как задачу о неподвижной точке относительно управления $\sigma = (u, \omega)$ оператора управления, однозначно определяемого правой частью системы.

Дополним краевую задачу (9)-(17) и задачу о неподвижной точке (18)-(21) условием точного выполнения ограничения (3). В результате получим условия улучшения управления с точным выполнением ограничения.

2. Численный алгоритм

Для численного решения задачи о неподвижной точке (18)-(21),(3) можно использовать различные модификации известных методов последовательных приближений [7]. В качестве примера рассматривается аналог метода простой итерации при $k \geq 0$ с заданным начальным доступным управлением $\sigma^0 \in \Omega$ при $k = 0$:

$$u^{k+1}(t) = P_U(u^I(t) + \alpha(H_u(p(t,\sigma^I,\sigma^k),x(t,\sigma^k),u^I(t),\omega^I,t) + s_1^k(t))),\ t \in T, \tag{22}$$

$$\Delta_{u^k(t)} H(p(t,\sigma^I,\sigma^k),x(t,\sigma^k),u^I(t),\omega^I,t) = \\ = \left\langle H_u(p(t,\sigma^I,\sigma^k),x(t,\sigma^k),u^I(t),\omega^I,t) + s_1^k(t), u^k(t) - u^I(t) \right\rangle, \tag{23}$$

$$\omega^{k+1} = P_W(\omega^I + \alpha(-\varphi_\omega(x(t_1,\sigma^k),\omega^I) + \\ + \int_T H_\omega(p(t,\sigma^I,\sigma^k),x(t,\sigma^k),u^k(t),\omega^I,t)dt + s_2^k)), \tag{24}$$

$$\Delta_{\omega^k}\{-\varphi(x(t_1,\sigma^k),\omega^I) + \int_T H(p(t,\sigma^I,\sigma^k),x(t,\sigma^k),u^k(t),\omega^I,t)dt\} = \\ = \left\langle -\varphi_\omega(x(t_1,\sigma^k),\omega^I) + \int_T H_\omega(p(t,\sigma^I,\sigma^k),x(t,\sigma^k),u^k(t),\omega^I,t)dt + s_2^k, \omega^k - \omega^I \right\rangle, \tag{25}$$

$$\Phi_1(\sigma^{k+1}) = \varphi_1(x(t_1,\sigma^{k+1})) = 0, \tag{26}$$

где величины $s_1^k(t)$ и s_2^k определяются согласно выбираемому способу однозначно определяемого оператора управления в задаче о неподвижной точке (18)-(21).

Для численного решения уравнения (26) с заданной точностью можно использовать известные методы скалярной оптимизации (метод деления отрезка пополам, метод ломаных и др.) [8, 9].

Итерации по индексу $k \geq 0$ с выполнением ограничения (26) проводятся до первого выполнения условия:

$$J\left(\sigma^{k+1}\right) < J\left(\sigma^I\right).$$

В этом случае строится новая задача (18)-(21),(3) для улучшения полученного расчетного управления, принимаемого в качестве нового σ^I, и итерационный алгоритм повторяется. При этом в качестве начального приближения управления $\sigma^0 \in \Omega$ при $k = 0$ для итерационного процесса (22)-(26) можно выбирать полученное расчетное управление.

Отметим, что полученное расчетное управление удовлетворяет ограничению с заданной точностью. Таким образом, начиная со второй расчетной задачи улучшения (18)-(21),(3), последовательность расчетных управлений образует релаксационную последовательность управлений,

которые являются допустимыми с заданной точностью. При этом, задавая точность выполнения ограничения, можно добиться желаемой точности релаксации по целевому функционалу исходной задачи:

$$\Phi_0(\sigma^{k+1}) \approx J\left(\sigma^{k+1}\right) < J\left(\sigma^{I}\right) \approx \Phi_0(\sigma^{I}).$$

Если строгое улучшение управления по функционалу расширения в процессе итераций не достигается, то численный расчет задачи о неподвижной точке (18)-(21),(3) проводится до выполнения условия:

$$\max\left\{ \left\| u^{k+1} - u^{k} \right\|_{C(T)}, \left| \omega^{k+1} - \omega^{k} \right| \right\} \le \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ - заданная точность расчета задачи о неподвижной точке. На этом построение и расчет последовательных задач улучшения управления заканчивается. В результате получаем релаксационную последовательность управлений $\sigma^{k} \in \Omega$, удовлетворяющих ограничению (3) с заданной точностью.

Условия сходимости итерационного процесса (22)-(26) можно получить аналогично работам [2, 7] на основе требований, обеспечивающих известное свойство «сжимания» для оператора правой части задачи о неподвижной точке. Условия сходимости релаксационной последовательности управлений к оптимальному решению можно обосновать на основе достаточных условий существования минимизирующей последовательности управлений в задачах с ограничениями, аналогично работе [6].

Заключение

Новизна предлагаемого подхода заключается в представлении краевой задачи улучшения управления с точным выполнением ограничений в конструктивной форме задачи о неподвижной точке оператора управления. Это позволяет применить развитую теорию и методы неподвижных точек для эффективного поиска допустимых улучшающих управлений.

Рассматриваемый метод характеризуется точным выполнением ограничений задачи на каждой итерации улучшения управления; нелокальностью улучшения управлений; отсутствием трудоемкой процедуры игольчатого или выпуклого варьирования управления в малой окрестности улучшаемого управления, характерной для градиентных методов; наличием одного основного настроечного параметра $\alpha > 0$, регулирующего скорость, качество и область сходимости итерационного процесса. Эти свойства являются существенными факторами повышения эффективности решения нелинейных задач оптимального управления с ограничениями.

Сравнительная эффективность алгоритма иллюстрируется на расчетах ряда модельных задач оптимального управления.

Литература

1. Срочко В.А. Итерационные методы решения задач оптимального управления. - М.: Физматлит, 2000. – 160 с.
2. Булдаев А.С. Методы возмущений в задачах улучшения и оптимизации управляемых систем. – Улан-Удэ: Изд-во Бурятского госуниверситета, 2008. – 260 с.
3. Buldaev A.S., Khishektueva I.-Kh. The fixed point method in parametric optimization problems for systems // Automation and Remote Control. – 2013. - V. 74, No. 12. - P. 1927–1934.
4. Булдаев А. С. Методы неподвижных точек на основе операций проектирования в задачах оптимизации управляющих функций и параметров динамических систем // Вестник Бурятского госуниверситета. Математика, информатика – 2017. – № 1. - С. 38 -54. DOI: 10.18101/2304-5728-2017-1-38-54.
5. Buldaev A.S., Burlakov I.D. About One Approach to Numerical Solution of Nonlinear Optimal Speed Problems // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. - 2018. - Т. 11, № 4. - С. 55-66.
6. Гурман В.И. Принцип расширения в задачах управления. М.: Наука, 1997. – 288 с.
7. Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
8. Васильев О. В. Лекции по методам оптимизации. Иркутск: Изд-во ИГУ, 1994. - 340 с.
9. Васильев Ф.П. Численные методы решения экстремальных задач. – М.: Наука, 1980. – 518 с.

References

1. Srochko V. A. Iterative methods for solving optimal control problems. - M.: Fizmatlit, 2000. 160 p.
2. Buldaev A. S. Perturbation methods in problems of improvement and optimization of controlled systems. – Ulan-Ude: publishing House of Buryat State University, 2008. 260 p.
3. Buldaev A. S., Khishektueva I.-Kh. The fixed point method in parametric optimization problems for systems // Automation and Remote Control. – 2013. - V. 74, No. 12. - P. 1927-1934.
4. Buldaev A. S. Methods of fixed points based on the actions of designing in optimization tasks of the control functions and parameters of dynamic systems // Bulletin of the Buryat State University. Mathematics, Informatics – 2017. – № 1. - P. 38 -54. DOI: 10.18101/2304-5728-2017-1-38-54.
5. Buldaev A. S., Burlakov I. D. About One Approach to Numerical Solution of Nonlinear Optimal Speed Problems // Bulletin of South Ural state University. Series: Mathematical modeling and programming. - 2018. - Vol. 11, № 4. - P. 55-66.
6. Gurman V. I. the extension Principle in control problems. M.: Science, 1997. – 288 p.
7. Samarskiy A. A., Gulin A.V. Numerical methods. – Moscow: Science, 1989. – 432 p.
8. Vasiliev O. V., Lectures on optimization techniques. Irkutsk: Publishing house of ISU, 1994. - 340 c.
9. Vasiliev F. P. Numerical methods for solving extreme problems. – Moscow: Science, 1980. – 518 p.

УДК 514.76

ПОСТРОЕНИЕ ГЕОДЕЗИЧЕСКИХ ЛИНИЙ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ «MATHCAD»

© Дубанов Александр Анатольевич
кандидат технических наук, доцент,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: alandubanov@mail.ru

© Заятуев Батор Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: zayatuyev@yandex.ru

© Нефедов Юрий Юрьевич
старший преподаватель
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: yn-solar-wind@yandex.ru

В данной статье рассматриваются вопросы разработки алгоритмов построения геодезических линий на поверхностях, заданных точечным базисом. В качестве среды разработки выбрана система компьютерной математики MathCAD. Процесс реализации решения данной задачи базируется на вводе в математическую модель динамической локальной системы координат, поскольку построение геодезических линий выполняется до точки, находящейся в движении. Как результат можно считать анимированное изображение, выложенное на канале Youtube.com, а также программный код с комментариями, приведенный на сайте автора.
Ключевые слова: задача преследования, преследующий объект, объект преследования, горизонтальная проекция вектора скорости, уравнение поверхности, символы Кристоффеля, локальная система координат, краевые условия, метод стрельбы.

1. Введение. Постановка задачи

Ранее, в статье [1], автором производилось решение в системе «MathCAD» известной задачи преследования. Преследование производилось на пересеченной местности, уравнение поверхности которой задано в явном виде $z = f(x, y)$. При реализации данной задачи предлагалась модель, когда горизонтальная проекция вектора скорости преследующего объекта («Лиса») направлена на горизонтальную

проекцию объекта преследования («Кролик»). Данное условие учитывается в системе уравнений (1.1)

$$\begin{cases} \dfrac{dX_f}{dt} = \dfrac{V_f \cdot (X_r - X_f)}{\sqrt{(X_r - X_f)^2 + (Y_r - Y_f)^2 + \left((X_r - X_f) \cdot \dfrac{\partial f(X_f, Y_f)}{\partial X_f} + (Y_r - Y_f) \cdot \dfrac{\partial f(X_f, Y_f)}{\partial Y_f} \right)^2}} \\ \dfrac{dY_f}{dt} = \dfrac{V_f \cdot (Y_r - Y_f)}{\sqrt{(X_r - X_f)^2 + (Y_r - Y_f)^2 + \left((X_r - X_f) \cdot \dfrac{\partial f(X_f, Y_f)}{\partial X_f} + (Y_r - Y_f) \cdot \dfrac{\partial f(X_f, Y_f)}{\partial Y_f} \right)^2}} \end{cases} \quad (1.1)$$

Где X_f, Y_f – горизонтальная проекция «Лисы», X_r, Y_r – горизонтальная проекция «Кролика», V_f - модуль скорости «Лисы».

В данной статье будет рассмотрена модель, где в определенный момент времени скорость «Лисы» $\vec{V}_f$ направлена по геодезической линии, соединяющей преследующий с преследуемым.

В качестве примера, будет рассмотрена следующая поверхность $z = e^{-(x^2+y^2)}$. Нами она была выбрана в качестве модели «одинокой горы». Преследуемая точка будет двигаться по траектории, которая в проекции на плоскость XOY будет окружностью. Нашей задачей будет выполнять динамически расчет геодезической линии, соединяющей нашу точку наблюдения («Лиса») с преследуемой точкой «Кроликом».

2. Геодезическая линия по двум точкам. Реализация в «MathCAD».

Будем считать, что по условиям задачи, у нас есть поверхность, заданная в виде $z = f(x, y)$. Нам выгоднее ее представить в параметрическом виде $\vec{R}(u, v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u, v) \end{bmatrix}$ для того, чтобы реализовать подходы, изложенные в классических учебниках по дифференциальной геометрии [2][3]. Согласно известным трудам по дифференциальной геометрии, координаты геодезической линии должны удовлетворять решению системы дифференциальных уравнений (2.1).

$$\begin{cases} \dfrac{d^2u}{ds^2} = -\Gamma_{11}^1 \cdot \left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 - 2\Gamma_{12}^1 \cdot \dfrac{du}{ds} \cdot \dfrac{dv}{ds} - \Gamma_{22}^1 \cdot \left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 \\ \dfrac{d^2v}{ds^2} = -\Gamma_{11}^2 \cdot \left(\dfrac{du}{ds}\right)^2 - 2\Gamma_{12}^2 \cdot \dfrac{du}{ds} \cdot \dfrac{dv}{ds} - \Gamma_{22}^2 \cdot \left(\dfrac{dv}{ds}\right)^2 \end{cases} \quad (2.1)$$

Где Γ_{ij}^k –символы Кристоффеля второго рода, а, *s*– параметр длины дуги. Мы считаем, что для решения наших задач, поставленных в этой статье, более удобным является, когда параметр v является зависимым от параметра *u*(2.2).

$$\frac{d^2v}{du^2} = -\Gamma_{22}^2 + \left(\Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2\right) \cdot \frac{dv}{du} + \left(2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2\right) \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + \Gamma_{11}^1 \cdot \left(\frac{dv}{du}\right)^3 \quad (2.2)$$

Вывод уравнения (2.2) был показан в учебном пособии [4].

Нами представлен программный код [5], выполняющий построение геодезической линии на поверхности $z = e^{-\left(x^2+y^2\right)}$ из точки (-2;-0.5) в точку (2;-0.5) (Рис. 1)

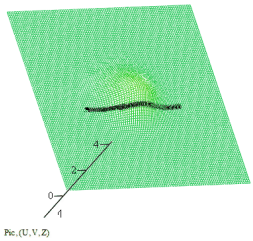


Рис. 1 Геодезическая по двум точкам. Краевая задача.

Данный программный код выполнен в системе компьютерной математики «MathCAD 11» доступен для просмотра на следующем ресурсе: [5]

При решении дифференциального уравнения (2.2) является важным наличие функциональной зависимости $v(u)$. Вероятность существования такой зависимости существенно повышает переход в локальную систему координат (Рис. 2).

Предполагается, что в зависимости от значения угла φ, что является функцией времени, будет производиться переход в локальную систему координат $\vec{H}_1, \vec{H}_2$, что означает перерасчет исходной

поверхности $\vec{R}(u,v)=\begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{bmatrix}$ и символов Кристоффеля (2.3) в новом динамическом базисе.

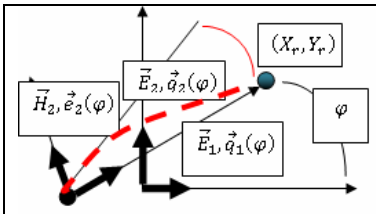


Рис. 2 Преобразования координат

$\vec{E}_1, \vec{E}_2$ - базис плоскости (XOY).

$\vec{H}_1, \vec{H}_2$ - локальный базис, организованный направлением, соединяющим преследующий объект с преследуемым.

В данном случае, мы зависимость от времени базиса $\vec{H}_1, \vec{H}_2$ выражаем в угле наклона φ оси $\vec{H}_1$ к оси $\vec{E}_2$.

$\vec{q}_1(\varphi), \vec{q}_2(\varphi)$ - координаты базиса $\vec{E}_1, \vec{E}_2$ в базисе $\vec{H}_1, \vec{H}_2$.

$\vec{e}_1(\varphi), \vec{e}_2(\varphi)$ - координаты базиса $\vec{H}_1, \vec{H}_2$ в базисе $\vec{E}_1, \vec{E}_2$.

Для реализации поставленной задачи в системе «MathCAD» , мы взяли для примера простую поверхность $\vec{R}(u,v)=\begin{bmatrix} u \\ v \\ e^{-(x^2+y^2)} \end{bmatrix}$. Далее, мы вычислим коэффициенты первой квадратичной формы $g(u,v)=\begin{bmatrix} \vec{R}_u \cdot \vec{R}_u & \vec{R}_u \cdot \vec{R}_v \\ \vec{R}_u \cdot \vec{R}_v & \vec{R}_v \cdot \vec{R}_v \end{bmatrix}$ и сразу найдем инверсную ей матрицу $ig(u,v)=g(u,v)^{-1}$. Запись символов Кристоффеля второго рода (2.3) мы взяли из источника [Жукова, Багаев], как адаптированную для ввода в системы компьютерной математики.

$$\Gamma_{11}^1=\frac{1}{2}ig_{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u}+\frac{\partial g_{11}}{\partial u}-\frac{\partial g_{11}}{\partial u}\right)+\frac{1}{2}ig_{12}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u}+\frac{\partial g_{21}}{\partial u}-\frac{\partial g_{11}}{\partial v}\right) \quad (2.3)$$

$$\Gamma_{12}^1=\frac{1}{2}ig_{11}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v}+\frac{\partial g_{12}}{\partial u}-\frac{\partial g_{12}}{\partial u}\right)+\frac{1}{2}ig_{12}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v}+\frac{\partial g_{22}}{\partial u}-\frac{\partial g_{12}}{\partial v}\right)$$

$$\Gamma_{22}^1=\frac{1}{2}ig_{11}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial v}+\frac{\partial g_{12}}{\partial v}-\frac{\partial g_{22}}{\partial u}\right)+\frac{1}{2}ig_{12}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v}+\frac{\partial g_{22}}{\partial v}-\frac{\partial g_{22}}{\partial v}\right)$$

$\Gamma_{11}^2 = \frac{1}{2} ig_{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial u} + \frac{\partial g_{11}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial u}\right) + \frac{1}{2} ig_{22}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial u} + \frac{\partial g_{21}}{\partial u} - \frac{\partial g_{11}}{\partial v}\right)$	
$\Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} ig_{21}\left(\frac{\partial g_{11}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial u}\right) + \frac{1}{2} ig_{22}\left(\frac{\partial g_{12}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial u} - \frac{\partial g_{12}}{\partial v}\right)$	
$\Gamma_{22}^2 = \frac{1}{2} ig_{21}\left(\frac{\partial g_{21}}{\partial v} + \frac{\partial g_{12}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial u}\right) + \frac{1}{2} ig_{22}\left(\frac{\partial g_{22}}{\partial v} + \frac{\partial g_{22}}{\partial v} - \frac{\partial g_{22}}{\partial v}\right)$	

Далее, мы приступим к решению краевой задачи. Для этого мы преобразуем дифференциальное уравнение второго порядка (2.2) в систему ОДУ первого порядка (2.4) стандартным методом. Далее система уравнений (2.4) решается при помощи встроенной процедуры rkfixed.

$\begin{cases} \frac{dY_0}{du} = Y_1 \\ \frac{dY_1}{du} = -\Gamma_{22}^2 + \left(\Gamma_{22}^1 - 2\Gamma_{12}^2\right)\cdot Y_1 + \left(2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{11}^2\right)\cdot \left(Y_1\right)^2 + \Gamma_{11}^1 \cdot \left(Y_1\right)^3 \end{cases}$	(2.4)

где $Y_0 = \upsilon, Y_1 = \frac{d\upsilon}{du}$.

При реализации метода «стрельбы» в системе «MathCAD» [5], нами был задан диапазон углов $\alpha = \left[-\frac{\pi}{12}; \frac{\pi}{12}\right]$ с шагом $\Delta\alpha = \frac{\pi}{60}$.Для каждого значения α_i решается система уравнений (2.4) с начальными условиями $\begin{bmatrix} -2 \\ tg(\alpha_i) \end{bmatrix}$. В приведенном примере геодезическая линия строится от точки $(-2;-0.5)$ до точки $(2;-0.5)$. Посмотреть листинг решения данной задачи можно здесь [5]. Далее, при получении решения системы дифференциальных уравнений (2.4) на отрезке $u = [-2;2]$, невязка для каждого значения α_i будет равна $\lambda_i = v\big|_{u=2} - v_0$, в данном примере $v_0 = -0.5$. На рис. 3 показана зависимость невязки λ_i от угла «стрельбы» α_i. К зависимости $\lambda(\alpha)$ можно применить различные методы интерполяции, в нашем примере была применена линейная интерполяция. Далее, для решения уравнения $\lambda(\alpha) = 0$ существует встроенная функция «MathCAD» root, которая ищет нули функции на заданном диапазоне. Полученное значение α дает направление геодезической линии от точки $(-2;-0.5)$ до точки $(2;-0.5)$.

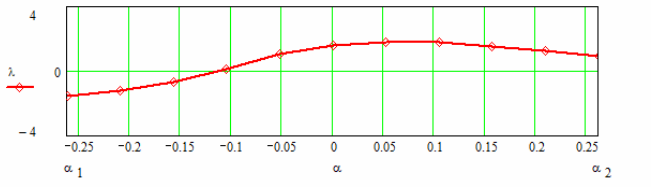


Рис. 3 Зависимость невязки от угла "стрельбы"

На рис. 4 показана зависимость параметра v (ось ординат на рисунке) от параметра u (ось абсцисс).

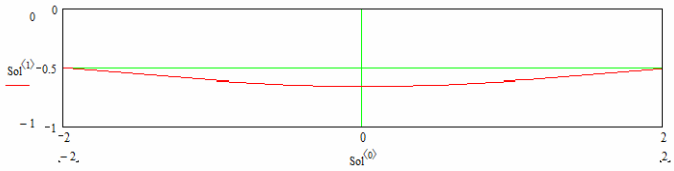


Рис. 4 Зависимость v от u

На рис. 4 наглядно видно, при угле вычисленном угле «стрельбы» $\lambda(\alpha)=0$, траектория геодезической линии выходит из точки $(-2;-0.5)$ и приходит в заданную точку $(2;-0.5)$

Следует отметить то, что в системе компьютерной математики «MathCAD» существуют встроенные средства решения краевых задач, такие как процедура «sbval», вычислительный блок «Given - Odesolve», но в этих процедурах, так или иначе, неявно прописан известный алгоритм «стрельбы». При реализации встроенных процедур неизбежны трудности при локализации корней уравнения $\lambda(\alpha)=0$, в случаях их множественности или их отсутствия. Поэтому, поиск нулей функции $\lambda(\alpha)=0$ мы решили написать сами, во избежание прерывания вычислительного процесса. Далее, мы решили описать построение геодезической линии из определенной неподвижной точки к точке, движущейся по определенной траектории по заданной поверхности.

3. Динамическое вычисление траектории геодезической линии

Для решения данной задачи, для примера, мы сформировали отдельный программный код [6], где для решения дифференциальных уравнений будет использован вычислительный блок системы «MathCAD» Given – Odesolve.

Как уже говорилось ранее, преследуемая точка движется по окружности в проекции на плоскость $XOY: \begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} + R \cdot \begin{bmatrix} \cos(\varphi) \\ \sin(\varphi) \end{bmatrix}$. Обозначения в этой формуле имеют тот же смысл, что и на Рис. 2. В листинге самой программы [6] были заданы значения $\begin{bmatrix} X_r \\ Y_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -0.5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} X_f \\ Y_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -0.5 \end{bmatrix}, R = 4$. Далее, в системе координат $\vec{H}_1, \vec{H}_2$ (Рис. 2) будет произведен перерасчет исходной поверхности $\vec{R}(u,v) = \begin{bmatrix} u \\ v \\ f(u,v) \end{bmatrix}$, коэффициентов первой квадратичной формы, символов Кристоффеля. Как несложно установить, все это будет зависеть от угла φ (Рис. 2). Также преобразуется в систему координат $\vec{H}_1, \vec{H}_2$ (Рис. 2) и дифференциальное уравнение второго порядка (2.2). Поскольку на основе его будет сформирован вычислительный блок Given – Odesolve. В сформированный вычислительный блок (Рис. 5) вводятся следующие граничные условия: $v(0) = 0$ и $\frac{dv}{du}(0) = tg(\gamma)$. Где γ - угол наклона «стрельбы» в системе координат $\vec{H}_1, \vec{H}_2$ к оси $\vec{H}_1$.

Given

$$\frac{d^2}{du_f^2} v_f(u_f) - \left[-G\phi 2_{22}(u_f, v_f(u_f), fi) + \left(G\phi 1_{22}(u_f, v_f(u_f), fi) - 2 \cdot G\phi 2_{12}(u_f, v_f(u_f), fi) \right) \cdot \left(\frac{d}{du_f} v_f(u_f) \right) + (2 \cdot$$

$v_f(0) = 0 \qquad v_f'(0) = gamma \qquad v_{ff}(fi, gamma) := Odesolve(u_f, 4)$

Рис. 5 Вычислительный блок Given-Odesolve. Фрагмент листинга

Вычислительный блок Given – Odesolve позволяет сформировать функцию пользователя. В данном программном коде (Рис. 5) нами была сформирована функция $v(\varphi,\gamma)$, где φ - угол между векторами $\vec{H}_1$ и $\vec{E}_1$, а γ - угол наклона «стрельбы» к оси $\vec{H}_1$(Рис. 2). В данном листинге программы переменная **gamma** имеет значение $tg(\gamma)$. Отметим следующее, вычислительный блок Given – Odesolve позволяет решить краевую задачу, если задать краевые условия $v(0)=0$ и $v(4)=0$, но при решении нашей задачи встроенный алгоритм решения проявил нестабильность при поиске решений уравнения (2.2), поэтому мы решили сами реализовать алгоритм «стрельбы». В программном коде [6] все реализовано для случая, когда объект преследования движется по сегменту окружности в проекции на горизонтальную плоскость $\varphi\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ (Рис. 6). Для каждого значения φ_i мы выпускаем серию «пристрелочных» выстрелов γ_i (в данном случае $\gamma\in\left[-\frac{\pi}{12};\frac{\pi}{12}\right]$) и в результате получаем для каждого значения φ_i массив невязок $\lambda_{i,j}$ (Рис. 7) отклонения траектории геодезической от расчетной точки, соответствующей значению φ_i. Для каждого значения φ_i следует построить интерполирующую функцию, чтобы найти значение невязки $\lambda 0_i=0$. В нашем программном коде мы применили линейную интерполяцию. На Рис. 7 отмечены все точки $\lambda 0_i$, имеющие нулевую невязку.

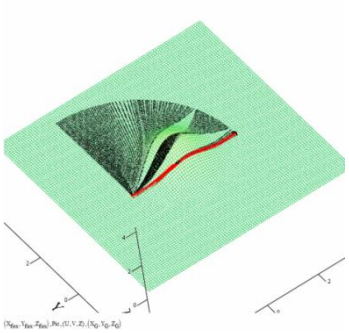


Рис. 6 Преследуемый объект движется по окружности

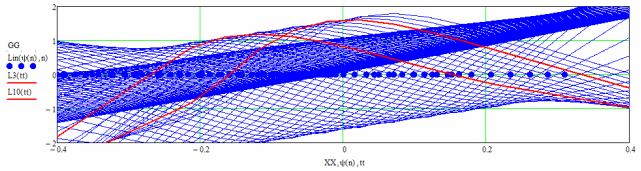


Рис. 7 Массив невязок

Результат моделирования можно просмотреть здесь [7], а также данная гиперссылка прикреплена к Рис. 6.

4. Выводы

В данной статье мы решали задачу о построении геодезической линии из заданной точки к движущейся точке. Целью являлась разработка алгоритма решения данной задачи. Для решения краевой задачи использовался метод «стрельбы». Результаты представлены на сайте автора и на канале Youtube.com. В работах [8], [9], [10], [11], [12] предлагаются различные модели, применительно к задаче преследования, но все они рассматриваются исключительно на плоскости. При использовании алгоритмов, предложенных в данной статье, возможно применение моделей, разработанных в [8], [9], [10], [11], [12], не только на плоскости, но на поверхностях, заданных точечным базисом.

Литература

[1] Дубанов А.А., Эрдынеева Л. И. Задача преследования в системе вычислительной математики «MathCAD»/ Международный журнал прикладных и фундаментальных исследований, 2016, № 9, стр. 7-12

[2] Рашевский П.К. Курс дифференциальной геометрии / Государственное издательство технико-теоретической литературы, М. – Л., 1950 г., 428 с.

[3] Выгодский М.Я. Дифференциальная геометрия / Государственное издательство технико-теоретической литературы, М. – Л., 1949 г., 513 с.

[4] Жукова Н.И., Багаев А.В. Геодезические линии на поверхностях. Учебно-методическое пособие. / Издательство Нижегородского госуниверситета, Н. Новгород, 2008 г., 54 с.

[5] Дубанов А.А. Геодезические линии в задаче преследования. Геодезические/ Дубанов А.А. Сайт «Геометрическое моделирование в MathCAD» - URL : http://dubanov.exponenta.ru

[6] Дубанов А.А. Геодезические линии в задаче преследования. Построение геодезической до бегущей точки. Использование блока «Given-Odesolve»/ Дубанов А.А. Сайт «Геометрическое моделирование в MathCAD» - URL : http://dubanov.exponenta.ru

[7] Дубанов А.А. Геодезическая линия. Сайт http://www.youtube.com
URL : https://www.youtube.com/watch?v=XIzV9kQdM-s

[8] Бурдаков С.Ф., Сизов П.А., Алгоритмы управления движением мобильного робота в задаче преследования. / Научно-технические ведомости Санкт-Петербургского Государственного Политехнического Университета. Информатика. Телекоммуникации. Управление. 2014, 6, стр. 47-57

[9] Желнин Ю.Н., Линеаризованная задача преследования и уклонения на плоскости. / Ученые записки ЦАГИ, 1977, 3 (том 8), стр. 88-97

[10] Кузьмина Л. И., Осипов Ю. В., Расчет длины траектории для задачи преследования/ Вестник МГСУ, 2013, № 12, стр. 20-26.

[11] Саматов Б.Т., Задача преследования – убегания при интегрально-геометрических ограничениях на управление преследователя / Автоматика и телемеханика, 2013, 7, стр. 17-27

[12] Маматов М.Ш., Алимов Х.Н., К решению задачи преследования в управляемых распределенных системах высокого порядка/ Математические труды, 2013, 2, том 16, стр. 95-110

УДК 514.76

РАСЧЕТ КИНЕМАТИЧЕСКОЙ СХЕМЫ В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ «MATHCAD»

© Дубанов Александр Анатольевич
кандидат технических наук, доцент,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: alandubanov@mail.ru

© Заятуев Батор Владимирович
кандидат физико-математических наук, доцент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: zayatuyev@yandex.ru

© Нефедов Юрий Юрьевич
старший преподаватель
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: yn-solar-wind@yandex.ru

1. **Введение**

В данной статье предлагается рассмотреть алгоритм и методика расчета кинематических схем. Применяется в данном алгоритме метод решения систем нелинейных уравнений, описанный в работе [1] (метод Драгилева). Данная статья была написана после плодотворных дискуссий на форуме сайта exponenta.ru в топике под названием «Рычажные механизмы». Следует сразу отметить, что результаты, отображаемые в данной статье, далеко не единственные, поскольку много участников дискуссии проводили свои исследования. Наиболее полно метод решения ОДУ представлен в источнике [4]

2. **Постановка задачи**

Для демонстрации работы алгоритма расчета необходимо выбрать реальную кинематическую схему. Мы остановили выбор на схеме уборки шасси самолета-амфибии, (Рис.1). Рисунок был предоставлен на форуме Exponenta.ru В.Ф. Очковым (МЭИ, д.т.н., профессор).

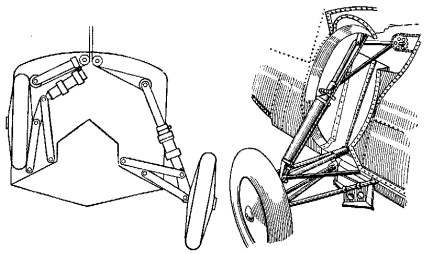


Рис. 1. Схема уборки шасси

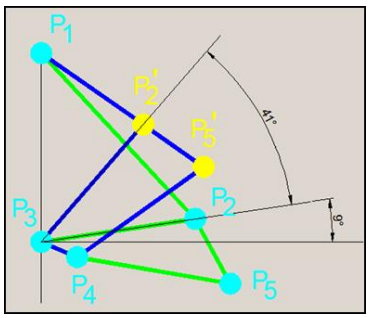


Рис. 2. Кинематическая схема

Мы немного упростили кинематическую схему (Рис.2). Расстояние $|P_1P_2|$ изменяется с постоянной скоростью. Точки P_1, P_3, P_4 закреплены неподвижно, точки P_2, P_5 изменяют свое положение в зависимости от расстояния $|P_1P_2|$. В нашей кинематической схеме примем следующее:

$$\begin{cases} |P_2 - P_1| = S(t) \\ |P_3 - P_2| = R_1 \\ |P_5 - P_4| = R_2 \\ |P_5 - P_2| = L \end{cases}, \quad (1)$$

где R_1, R_2, L, а S изменяется линейно от времени t с постоянной скоростью $\upsilon, S(t) = S_0 - \upsilon \cdot t.\ S(t) = S_0 - \upsilon \cdot t.$

3. Формализация задачи

Систему уравнений (1) для того, чтобы подвести под решение системы нелинейных уравнений методом Драгилева, необходимо подготовить следующим образом. Пусть абсцисса и ордината точки P_2 будут X_1 и X_2. Абсцисса и ордината точки P_5 будут X_3, X_4. Время будет $t = X_5$. Тогда система уравнений (1) приобретает следующий вид:

$$\begin{bmatrix} (X_1 - P_{1,x})^2 + (X_2 - P_{1,y})^2 - S(X_5)^2 \\ (X_1 - P_{3,x})^2 + (X_2 - P_{3,y})^2 - R_1^2 \\ (X_3 - P_{4,x})^2 + (X_4 - P_{4,y})^2 - R_2^2 \\ (X_1 - X_3)^2 + (X_2 - X_4)^2 - L^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (2)$$

Мы имеем систему уравнений (2) из 4 уравнений с 5 неизвестными. Далее, система (2) дифференцируется по формальному параметру T

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1}\cdot\frac{dX_1}{dT}+\cdots+\frac{\partial F_1}{\partial X_5}\cdot\frac{dX_5}{dT} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_1}\cdot\frac{dX_1}{dT}+\cdots+\frac{\partial F_2}{\partial X_5}\cdot\frac{dX_5}{dT} \\ \frac{\partial F_3}{\partial X_1}\cdot\frac{dX_1}{dT}+\cdots+\frac{\partial F_3}{\partial X_5}\cdot\frac{dX_5}{dT} \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_1}\cdot\frac{dX_1}{dT}+\cdots+\frac{\partial F_4}{\partial X_5}\cdot\frac{dX_5}{dT} \end{bmatrix} = 0 \text{, где} \tag{3}$$

$$F_1 = (X_1 - P_{1,x})^2 + (X_2 - P_{1,y})^2 - S(X_5)^2$$
$$F_2 = (X_1 - P_{3,x})^2 + (X_2 - P_{3,y})^2 - R_1^2$$
$$F_3 = (X_3 - P_{4,x})^2 + (X_4 - P_{4,y})^2 - R_2^2$$
$$F_4 = (X_1 - X_3)^2 + (X_2 - X_4)^2 - L^2$$

В качестве одного из нетривиальных решений системы однородных линейных уравнений (3) относительно вектора переменных $\begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dT} & \frac{dX_2}{dT} & \frac{dX_3}{dT} & \frac{dX_4}{dT} \end{bmatrix}^T$ предлагается следующее решение:

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_1}{dT} \\ \frac{dX_2}{dT} \\ \frac{dX_3}{dT} \\ \frac{dX_4}{dT} \end{bmatrix} = -\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_4}{\partial X_4} \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_5} \\ \frac{\partial F_2}{\partial X_5} \\ \frac{\partial F_3}{\partial X_5} \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_5} \end{bmatrix} \cdot \frac{dX_5}{dT} \tag{4}$$

Если предположить, что $X_5 = T = t$, то система уравнений (4) приобретает законченный вид для передачи во встроенные решатели систем обыкновенных дифференциальных уравнений известных пакетов компьютерной математики.

$$\begin{bmatrix} \frac{dX_1}{\partial t} \\ \frac{dX_2}{\partial t} \\ \frac{dX_3}{\partial t} \\ \frac{dX_4}{\partial t} \end{bmatrix} = -\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_4}{\partial X_4} \end{pmatrix} \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ \frac{\partial F_3}{\partial t} \\ \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{5}$$

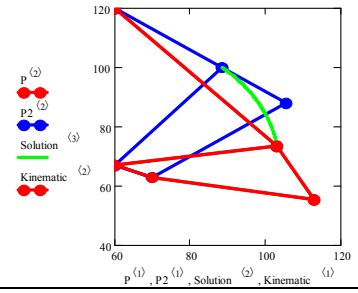
Если мы найдем численное решение системы уравнений (5), то это будет определение координат точек P_2 и P_5, при условии, что расстояние $|P_1P_2|$ будет сокращаться с постоянной скоростью υ, в зависимости от времени *t*.

3. Реализация задачи в системе компьютерной математики «MathCAD»

Поскольку мы не обладаем информацией о реальных геометрических характеристиках схемы уборки шасси самолета-амфибии (Рис. 1), то мы позволили себе создать в системе «AutoCAD» чертеж (Рис. 2) с произвольными параметрами, схематически похожий на шасси самолета-амфибии. Далее, произведен импорт точек чертежа в два текстовых файла, отвечающих за начальное и конечное положение системы. В следующей таблице приводится программный код решения задачи расчета динамики рычажного механизма, указанного в Рис. 2.

Condition1 := READPRN("C:\WorkMathCAD\linkage\Cons1.txt") Condition2 := READPRN("C:\WorkMathCAD\linkage\Cons2.txt") ORIGIN:=1	Для корректной работы программы необходимо создать каталог с указанными файлами.
Condition1= $\begin{pmatrix} 60 & 120 & 0 \\ 103.0386 & 73.5891 & 0 \\ 60 & 67.14290 & 0 \\ 70 & 62.85710 & 0 \\ 112.8829 & 55.4453 & 0 \\ 103.0386 & 73.5891 & 0 \end{pmatrix}$ $p := \begin{pmatrix} 60 & 120 & 0 \\ 103.0386 & 73.5891 & 0 \\ 60 & 67.14290 & 0 \\ 70 & 62.85710 & 0 \\ 112.8829 & 55.4453 & 0 \\ 103.0386 & 73.5891 & 0 \end{pmatrix}$ Condition2= $\begin{pmatrix} 60 & 120 & 0 \\ 88.5192 & 100.0143 & 0 \\ 60 & 67.14290 & 0 \\ 70 & 62.85710 & 0 \\ 105.4126 & 88.1519 & 0 \\ 88.5192 & 100.0143 & 0 \end{pmatrix}$ $P2 := \begin{pmatrix} 60 & 120 & 0 \\ 88.5192 & 100.0143 & 0 \\ 60 & 67.14290 & 0 \\ 70 & 62.85710 & 0 \\ 105.4126 & 88.1519 & 0 \\ 88.5192 & 100.0143 & 0 \end{pmatrix}$	Начальное и конечное положение системы

$R_1 := \sqrt{(P_{3,1}-P_{2,1})^2+(P_{3,2}-P_{2,2})^2}$ $R_1 = 43.519$ $R_2 := \sqrt{(P_{5,1}-P_{4,1})^2+(P_{5,2}-P_{4,2})^2}$ $R_2 = 43.519$ $L := \sqrt{(P_{5,1}-P_{2,1})^2+(P_{5,2}-P_{2,2})^2}$ $L = 20.642$ $S_0 := \sqrt{(P_{2,1}-P_{1,1})^2+(P_{2,2}-P_{1,2})^2}$ $S_0 = 63.295$	Расчет геометрических характеристик чертежа (Рис. 2)
$V := 2 \quad S(t) := S_0 - V \cdot t$	Задание скорости сокращения расстояния $\lvert P_1P_2 \rvert$
$F(x) := \begin{bmatrix} (X_1-P_{1,1})^2+(X_2-P_{1,2})^2-S(X_5)^2 \\ (X_1-P_{3,1})^2+(X_2-P_{3,2})^2-R_1^2 \\ (X_3-P_{4,1})^2+(X_4-P_{4,2})^2-R_2^2 \\ (X_1-X_3)^2+(X_2-X_4)^2-L^2 \end{bmatrix}$	Задание системы уравнений (2) $\begin{bmatrix} (X_1-P_{1,x})^2+(X_2-P_{1,y})^2-S(X_5)^2 \\ (X_1-P_{3,x})^2+(X_2-P_{3,y})^2-R_1^2 \\ (X_3-P_{4,x})^2+(X_4-P_{4,y})^2-R_2^2 \\ (X_1-X_3)^2+(X_2-X_4)^2-L^2 \end{bmatrix} = 0$
Jacobian(X) := Jacob(F(X), X) $\begin{matrix} -2X_1 & 120 & -2X_2 & 240 & 0 & 0 & 253.18112816784005809\,8\,X_5 \\ -2X_1 & 120 & -2X_2 & 134.2858 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2X_3 & 140 & -2X_4 & 125.7142 & 0 \\ -2X_1\cdot 2X_3 & -2X_2\cdot 2X_4 & -2X_3\cdot 2X_1 & -2X_4\cdot 2X_2 & & & 0 \end{matrix}$	Вычисление матрицы (Якобиан) $\begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_5} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_4}{\partial X_5} \end{bmatrix}$
$D(t,Y) := -\text{submatrix}\left(\text{Jacobian}\left(\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ t \end{pmatrix}\right), 1, 4, 1, 4\right)^{-1} \cdot \text{submatrix}\left(\text{Jacobian}\left(\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ t \end{pmatrix}\right), 1, 4, 5, 5\right)$	$\begin{bmatrix} \frac{dX_1}{\partial t} \\ \frac{dX_2}{\partial t} \\ \frac{dX_3}{\partial t} \\ \frac{dX_4}{\partial t} \end{bmatrix} = -\left[\begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_1}{\partial X_4} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_4}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial F_4}{\partial X_4} \end{pmatrix}\right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t} \\ \frac{\partial F_2}{\partial t} \\ \frac{\partial F_3}{\partial t} \\ \frac{\partial F_4}{\partial t} \end{bmatrix}$
$Y_0 := \begin{pmatrix} P_{2,1} \\ P_{2,2} \\ P_{5,1} \\ P_{5,2} \end{pmatrix} \quad Y_0 = \begin{pmatrix} 103.039 \\ 73.589 \\ 112.883 \\ 55.445 \end{pmatrix}$	Вектор начальных данных
$\text{Solution} := \text{Rkadapt}(Y_0, 0, 14.235, 500, D)$	Встроенный решатель систем ОДУ методом Рунге-Кутта 4 порядка. Выдает решение в виде матрицы размерности $[501 \times 5]$. Промежуток времени $t = [0;14.235]$ равномерно делится на 500 интервалов, $[t \quad X_1 \quad X_2 \quad X_3 \quad X_4]$.

$\text{Kinematic} := \begin{bmatrix} 60 & 120 & 0 \\ (\text{Solution}^{\langle 2 \rangle})_{\text{FRAME}+1} & (\text{Solution}^{\langle 3 \rangle})_{\text{FRAME}+1} & 0 \\ 60 & 67.1429 & 0 \\ 70 & 62.8571 & 0 \\ (\text{Solution}^{\langle 4 \rangle})_{\text{FRAME}+1} & (\text{Solution}^{\langle 5 \rangle})_{\text{FRAME}+1} & 0 \\ (\text{Solution}^{\langle 2 \rangle})_{\text{FRAME}+1} & (\text{Solution}^{\langle 3 \rangle})_{\text{FRAME}+1} & 0 \end{bmatrix}$	Точечная система $[P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \quad P_1]^T$ В движении, зависимость от времени, в нашем случае время отображает переменная FRAME (кадр).
	Итоговый результат работы программы. Число кадров 500.

По ссылке [2] можно просмотреть анимированное изображение в зависимости от времени. Скачать текст программы в системе компьютерной математики «MathCAD 15» можно по следующей ссылке [3]

Стоит отметить следующее, данная кинематическая схема (Рис. 2) является простой и допускает решение в символьном виде при использовании систем компьютерной математики (**MathCAD 15**). Для этого необходимо систему уравнений (1) преобразовать в две системы:

$\begin{cases} \lvert P_2 - P_1 \rvert = S(t) \\ \lvert P_3 - P_2 \rvert = R_1 \end{cases},$	1a
$\begin{cases} \lvert P_5 - P_4 \rvert = R_2 \\ \lvert P_5 - P_2 \rvert = L \end{cases},$	1b

После этого необходимо решить систему уравнений 1a, относительно абсциссы и ординаты точки P_2. Результаты решения системы уравнений 1a следует использовать при решении системы уравнений 1b относительно абсциссы и ординаты точки P_5. Программный код вы можете просмотреть здесь [5], скачать архив программного кода можно здесь [6]

4. Выбор управляющей точки

В указанной выше кинематической схеме все опиралось на то, что расстояние $\lvert P_1 P_2 \rvert$ изменяется линейно от времени $S(t) = S_0 - \upsilon \cdot t$. Теперь попробуем сменить модель. Потребуем, чтобы точка P_2 перешла в положение P_2' с вращением вокруг точки P_3 с постоянной угловой скоростью w.

Литература

[1] Электронный журнал «Прикладная Геометрия»
http://www.apg.mai.ru/Volume9/Number19/vol9num19_1.pdf
http://www.apg.mai.ru/Volume9/Number19/duban919.pdf
[2] http://www.youtube.com/watch?v=bsMJk10KN4M
[3]http://dubanov.exponenta.ru . Вкладка «Статья «Рычажные механизмы»
[4] http://malplab.ru/invitation_to_the_scientific_debate/
[5] http://dubanov.exponenta.ru . Вкладка «Статья «Рычажные механизмы», Решение системы уравнений (1)
[6] http://dubanov.exponenta.ru/2016/linkage1.rar

УДК 517.977

МЕТОД НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК ДЛЯ ПРИНЦИПА МАКСИМУМА ПОНТРЯГИНА[1]

© Думнов Владислав Александрович
студент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

© Булдаев Александр Сергеевич
доктор физико-математических наук, профессор,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: buldaev@mail.ru

Рассматривается нестандартный подход к решению типовой задачи оптимального управления со свободным правым концом, основывающийся на интерпретации известных условий принципа максимума Понтрягина в форме задачи о неподвижной точке конструируемых операторов управления. Приводятся различные постановки задач о неподвижной точке и рассматриваются итерационные методы их решения. Проводится сравнительный анализ эффективности численного решения тестовых задач оптимального управления.
Ключевые слова: задача оптимального управления, принцип максимума, операторы управления, задача о неподвижной точке, итерационные методы

FIXED POINT METHOD FOR PONTRYAGIN MAXIMUM PRINCIPLE

Vladislav A. Dumnov
Student
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

Aleksandr S. Buldaev
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: buldaev@mail.ru

A non-standard approach to solving a typical optimal control problem with a free right end is considered, which is based on the interpretation of the well-known conditions of the Pontryagin maximum principle in the form of a fixed point problem of constructed control operators. Different formulations of fixed point problems are given and iterative methods for their solution are considered. A comparative analysis of the effectiveness of the numerical solution of test problems of optimal control is carried out.
Keywords: optimal control problem, maximum principle, control operators, fixed point problem, iterative methods.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 18-41-030005-р_а; МОН РФ, проект 1.5049.2017/БЧ.

УДК 332.1

ОЦЕНКА ТРАЕКТОРИЙ РОСТА ЭКОНОМИКИ РЕГИОНА НА ОСНОВЕ РАСШИРЕННОЙ МЕЖОТРАСЛЕВОЙ МОДЕЛИ

© Дырхеев Константин Павлович
кандидат экономических наук, доцент,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а

В докладе рассматривается расширенная межотраслевая модель региона в динамической постановке. На основе реальных данных сформированы оценочные матрицы коэффициентов текущих затрат и приростной капиталоемкости, сделана попытка органической увязки отраслевых объемов регионального производства с оценочными показателями конечного потребительского спроса и инвестиционного процесса, оценены траектории сбалансированного экономического роста в регионе.

ESTIMATION OF THE GROWTH TRAJECTORIES OF THE REGIONAL ECONOMY BASED ON THE EXTENDED INTER-SECTORAL MODEL

The report discusses the extended inter-sectoral model of the region in a dynamic formulation. Based on real data, estimated matrices of current expenditure ratios and incremental capital intensity have been formed, an attempt has been made to organically link the sectoral volumes of regional production with estimated indicators of final consumer demand and the investment process, and estimated trajectories of balanced economic growth in the region.

Для моделирования структуры производства, межотраслевых связей и прогнозирования экономики во многих странах мира применяется метод “input-output” («затраты-выпуск»). Проблемам построения леонтьевских межотраслевых моделей на основе таблиц «затраты-выпуск» уделяется большое внимание исследователями разных стран [1, 4, 8, 9]. При решении системы линейных уравнений данной модели определяются межотраслевые потоки товаров и услуг. Равновесные объемы производства и отношения между секторами экономики исчисляются с помощью коэффициентов текущих материальных затрат, которые в определенном периоде являются устойчивыми и поддаются прогнозированию.

Имеется достаточный опыт построения межотраслевых моделей не только на уровне отдельных стран, но и на региональном уровне [2, 3, 7]. В 2013 г. по экономике Бурятии были разработаны базовые таблицы «затраты-выпуск» за 2011 г. по 50 видам экономической деятельности, которые в целях структурного анализа и сценарных расчетов агрегировались до уровня нескольких отраслей и секторов На основе агрегированных таблиц «затраты-выпуск» проводились сценарные расчеты развития экономики Бурятия [3] с использованием линейной статической межотраслевой модели региона.

В рамках статических межотраслевых моделей не устанавливается связь с предыдущими и последующими периодами. В отличие от статических динамические межотраслевые модели характеризуют производственные связи экономики на ряд лет, Такого рода модели, являющиеся по сути моделями средне-долгосрочного характера, являются важным объектом изучения [см., напр., 4, 5, 6]. Основой построения динамической системы уравнений в данной модели является математическая зависимость между величиной инвестиционных вложений и приростом валовых выпусков продукции и услуг. На примере экономики Республики Бурятия по данным вышеуказанных таблиц «затраты-выпуск» в разрезе трех агрегированных отраслей (секторов) было проведено экспериментальное решение расширенной межотраслевой модели в динамической постановке.

С подключением инвестиционного блока устанавливается непосредственная взаимосвязь между предыдущими и последующими периодами развития, что только приближает экономико-математический анализ к реальным экономическим условиям.

Основой для разработки динамической межотраслевой модели являются балансы производства и использования продукции, а также использования производственных фондов:

$x - Ax = y; \qquad fx = F,$

где $x = (x_i)$ – вектор валовых выпусков, $y = (y_i)$ – вектор конечного потребления (конечного спроса) в регионе, $(i = 1, \ldots, n; n -$ число отраслей);

$A = (a_{ij}), (i, j = 1, 2, \ldots, n;)$ – технологическая матрица прямых затрат,

$f = (f_{ij})_{m \times n}$ – матрица фондоемкости продукции,

$F = (F_1, \ldots, F_m)$ – вектор производственных фондов (капитала), m – число видов капитала.

В статической межотраслевой модели балансы производства продукции и капитала являются друг для друга внешними ограничениями, задаваемыми вне рамок модели. В связи с этим органическая внутренняя увязка производства продукции с производственными фондами отсутствует, что значительно затрудняет их балансировку в реальных условиях. В динамической межотраслевой модели данное ограничение преодолевается за счет введения в модель инвестиционных процессов создания капитала.

С точки зрения средне-и долгосрочной динамики развития экономики производственные инвестиции (вектор *U*) вместе с потреблением домашних хозяйств (вектор *C*) являются двумя принципиальными частями конечного спроса. С введением в динамическую модель временной переменной *t* имеем следующие балансовые соотношения:

$$x(t) = Ax(t) + y(t); \quad y(t) = C(t) + U(t); \quad U(t) = K\Delta F(t) = Kf\Delta x(t),$$

где $K = (k_{ij})_{n\times m}$ – матрица капитальных затрат, показывающая, сколько продукции вида *i* необходимо затратить для ввода в действие единицы фондов (капитала) вида *l (l=1,…,m)*. Для простоты примем годовой срок создания новых видов капитала, т.е. уже через год после осуществления затрат фонды участвуют в производстве продукции. В результате получаем открытую динамическую межотраслевую модель Леонтьева в дискретном времени (при $\Delta t = 1$):

$$x(t) - Ax(t) - B\Delta x(t) = C(t), \qquad (1)$$

где: $B = (b_{ij})_{n\times n} = Kf$ – матрица приростной капиталоемкости, коэффициенты которой показывают, сколько продукции вида *i* необходимо затратить в текущем году для увеличения производственной мощности *j*–ой отрасли на единицу продукции. Предполагается, что производственные мощности используются полностью и прирост продукции равен приросту мощности.

Как известно, открытая динамическая модель отражает развитие экономики региона при разных траекториях непроизводственного потребления $C(t)$. Между тем конечный потребительский спрос пропорционален доходам разных групп домашних хозяйств. В свою очередь эти доходы формируются в процессе производства различных продуктов и услуг. Для анализа взаимосвязей между различными группами доходов в процессе их формирования японским исследователем Миядзавой был разработан многосекторный множитель [9], который, в отличие от «межотраслевой матрицы мультипликаторов» Леонтьева формируется путем включения процесса генерации дохода.

Все домашние хозяйства региона можно разделить на определенные группы, например, по способам получения доходов. Пусть *q* – число таких групп. При этом объем их отраслевого непроизводственного потребления (вектор *C*) находится в определенной пропорции от общего объема доходов этих групп $z_r, (r = 1,\ldots,q)$:

$$C_{(n\times 1)} = D_{(n\times q)} z_{(q\times 1)},,$$

где $D_{(n\times q)} = (d_{ir})_{(n\times q)}$ – матрица удельных потреблений *i*-го продукта (услуги) в расчете на 1 денежную единицу (напр., 1 руб., $1 и т.п.) дохода домашних хозяйств *r*-й доходной группы $(i = 1,\ldots,n; r = 1,\ldots,q)$.

Заметим, что при суммировании элементов матрицы непроизводственного потребления *C* по каждому *r*-му столбцу получаем для каждой *r*-ой группы домашних хозяйств общие расходы на потребление всех благ:

$$c_r = \sum_{i=1}^{n} c_{ir} = \sum_{i=1}^{n} d_{ir} z_r = z_r \sum_{i=1}^{n} d_{ir} = z_r \beta_r = z_r (1 - s_r), (r = 1,\ldots,q)$$

Здесь β_r и s_r – удельные нормы потребления и сбережения для каждой *r*-й группы домашних хозяйств $(\beta_r + s_r = 1)$.

Определим структуру потребления благ по каждой *r*-ой группе домашних хозяйств:

$$\alpha_{ir} = \frac{c_{ir}}{c_r} = \frac{d_{ir} z_r}{\beta_r z_r} = \frac{d_{ir}}{1 - s_r}, (i = 1, \ldots, n; r = 1, \ldots, q),$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_{ir} = 1, (r = 1, ..., q).$$

Таким образом, зная по каждой *r*-ой группе домашних хозяйств исходные информационные данные по структуре потребления благ и значения норм сбережений, определяем матрицу удельного потребления домашних хозяйств:

$$D = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \cdots & \alpha_{nq} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11} & \cdots & d_{1q} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{n1} & \cdots & d_{nq} \end{pmatrix}.$$

Раскроем зависимость доходов домашних хозяйств от объемов выпускаемых в регионе продуктов (услуг). Общий доход каждой группы домашних хозяйств есть часть валовой добавленной стоимости, функционально связанной с объемами выпускаемых продуктов (услуг), что в векторно-матричном виде выглядит следующим образом:

$$z = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \upsilon_{11} & \cdots & \upsilon_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \upsilon_{q1} & \cdots & \upsilon_{qn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = Vx,$$

где $V_{(q \times n)} = (\upsilon_{rj})$ - матрица доходов, выплачиваемых *r*-ой группе домашних хозяйств в расчете на единицу стоимости валового выпуска продукции (услуги) *j*-ой отрасли, т.е.

$$\upsilon_{rj} = \frac{z_{rj}}{x_j} (r = 1, ..., q; j = 1, ..., n).$$

Отсюда вектор непроизводственного потребления непосредственно выражается через вектор валовых выпусков:

$$C = DVx$$

В результате произведения двух прямоугольных матриц DV при $n > q$ получается квадратная особенная матрица размерностью *n* (ее определитель равен нулю), в которой каждый из ее элементов есть удельное потребление *i*-го продукта (услуги) в расчете на 1 денежную единицу (1 руб., $1 и т.п.) стоимости валового выпуска продукции (услуги) *j*-ого вида экономической деятельности $(i, j = 1, ..., n)$.

Теперь, после качественных преобразований вектора непроизводственного потребления, открытая динамическая модель Леонтьева (1) переписывается в виде замкнутого динамического баланса:

$$x(t) - Ax(t) - B\Delta x(t) - DVx(t) = 0 \qquad (2)$$

Если прирост выпуска продукции *i*–той отрасли представить как

$$\Delta x_i(t) = x_i(t+1) - x_i(t),$$

то вектор инвестиционного спроса представляется как

$$U(t) = B\left[x(t+1) - x(t)\right] = B\rho x(t),$$

где p – темп прироста продукции за период (год).

Объединим технологическую матрицу коэффициентов прямых затрат и матрицу удельного потребления домашних хозяйств в «интегральную» матрицу коэффициентов текущих затрат: $A+DV$. В силу свойств матриц A, D и V полученная «интегральная» матрица отвечает критериям продуктивности.

Таким образом, после преобразований получаем следующие динамические уравнения:

$$x(t) - (A + DV)x(t) - \rho Bx(t) = 0,$$

$$(E - (A + DV))x(t) = \rho Bx(t),$$

$$(E - A - DV)^{-1} Bx(t) = \frac{1}{\rho} x(t).$$

Обозначив: $H = (h_{ij})_{(n\times n)} = (E - A - DV)^{-1} B$, $\lambda = \frac{1}{\rho}$ и опустив обозначение времени, получим: $Hx = \lambda x$.

Решая характеристическое уравнение матрицы H, определяем согласно теореме Перрона-Фробениуса о положительно-определенных матрицах максимальный по модулю характеристический корень $\lambda^* > 0$ и характеристический вектор $x^* > 0$. Найдя темп прироста производства $\rho^* = \frac{1}{\lambda^*}$, определяем сбалансированную траекторию роста экономики региона (вектор $\left\{kx^* : k \geq 0\right\}$).

Рассмотрим расширенную межотраслевую модель в динамической постановке на основе реальных оценочных данных по трем агрегированным отраслям (секторам) экономики Республики Бурятия: 1) добывающие отрасли, 2) перерабатывающие отрасли, 3) прочие отрасли (в основном сфера услуг), $(i, j = 1, 2, 3; n = 3)$.

Для простоты пока будем рассматривать производственные фонды (вектор капитала) и домашние хозяйства без разбиения на виды и группы, т.е. $m = 1; q = 1$.

Исходные данные:

Технологическая матрица: $A = \begin{pmatrix} 0,1454 & 0,2109 & 0,0297 \\ 0,2458 & 0,2890 & 0,2869 \\ 0,0216 & 0,0411 & 0,1636 \end{pmatrix}$,

матрица фондоемкости: $f = (f_{ij})_{(m\times n)} = \begin{pmatrix} 1,42 & 1,28 & 0,84 \end{pmatrix}$,

матрица капитальных затрат: $k = (k_{ij})_{(n\times m)} = \begin{pmatrix} 1,24 & 1,35 & 1,08 \end{pmatrix}'$,

структура потребления домашних хозяйств: $\alpha_1 = 0,105;\ \alpha_2 = 0,814;\ \alpha_3 = 0,081$.

В качестве управляющего параметра выступает норма сбережения *s*. Пусть: $s = 0,25$.

Этапы решения модели:

1) Матрица $B = Kf$: $B = \begin{pmatrix} 1,761 & 1,587 & 1,042 \\ 1,917 & 1,728 & 1,134 \\ 1,534 & 1,382 & 0,907 \end{pmatrix}$.

2) Матрица $D = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)'(1-s) = (0,079 \quad 0,0610 \quad 0,061)'$.

3) Матрица $DV = \begin{pmatrix} 0,0462 & 0,0362 & 0,0409 \\ 0,3584 & 0,2803 & 0,3173 \\ 0,0357 & 0,0279 & 0,0316 \end{pmatrix}$.

4) Матрица $\overline{A} = A + DV = \begin{pmatrix} 0,1917 & 0,2470 & 0,0707 \\ 0,6043 & 0,5693 & 0,6042 \\ 0,0573 & 0,0689 & 0,1952 \end{pmatrix}$.

5) Матрица $(E - A - DV)^{-1} = \begin{pmatrix} 2,6949 & 1,7995 & 1,5876 \\ 4,6026 & 5,7121 & 4,6924 \\ 0,5860 & 0,6173 & 1,7574 \end{pmatrix}$.

6) Матрица $H = (E - A - DV)^{-1} B = \begin{pmatrix} 10,630 & 9,582 & 6,288 \\ 26,251 & 23,663 & 15,529 \\ 4,910 & 4,426 & 2,905 \end{pmatrix}$.

7) В силу того, что матрица приростной капиталоемкости *B* является особенной (строки линейно зависимы), матрица *H* также является особенной (ее определитель равен нулю). Соответственно, раскрывая определитель $\det(H - \lambda E)$, получаем следующий характеристический многочлен квадратной матрицы *H* 3-й степени относительно ее собственного значения λ:

$$-\lambda^3 + 37,197\lambda^2 = 0.$$

Отсюда максимальное по своему модулю положительное значение $\lambda^* = 37{,}197$, а темп прироста производства $\rho^* = 0{,}0269 (\text{или } 2{,}69\%)$. Оценочно траектория сбалансированного роста экономики Республики Бурятия представляет собой вектор: $1{,}0269x^*$. Соответственно характеристический вектор выпуска определяется как:

$x^* = (1{,}0000 \quad 2{,}4696 \quad 0{,}4620)$.

На основе реальных данных за 2011 г. зададим оценочные значения валовых выпусков для базового года (в млн.руб.):

$x_1 = 68279,\ x_2 = 1686219,\ x_3 = 31542$.

Тогда значения для следующего года будут равны:

$x_1 = 70115{,}7,\ x_2 = 1731578{,}3,\ x_3 = 32390{,}5$ и т.д.

Пользуясь рассчитанными выше данными, построим оценочный межотраслевой баланс для базового года (в млн.руб., округление до целых):

	Промежуточное потребление: *Ax*			Итого *Ax*	C	U	y	x
	1	2	3					
1	9931	35555	938	46424	10545	11310	21855	68279
2	16786	48725	9050	74560	81747	12314	94061	168621
3	1475	6922	5160	13556	8135	9851	17986	31542
Итого	28192	91202	15148	134541	100426	33475	133902	268442
z	40088	77419	16395	133902				
x	68279	168621	31542	268442				

Таким образом, на основе построенной расширенной межотраслевой модели в динамической постановке с использованием реальных и оценочных данных можно выводить оценочные траектории сбалансированного роста экономики региона, корректируя значения и структуру входных коэффициентов и меняя управляющие параметры.

Литература

1. Гранберг А. Г. Основы региональной экономики: учебник для вузов. – М.: ВШЭ, 2000. – 495 с.

2. Дондоков З. Б.-Д., Дырхеев К. П. Межотраслевые модели с расширенным составом эндогенных переменных // Улан-Удэ: Вестник Бурятского государственного университета. Выпуск «Экономика. Право». – 2014. – № 2. – С. 3–5.

3. Дондоков З. Б.-Д., Дырхеев К. П. Методика проведения аналитических и прогнозных расчетов социально-экономического развития региона на основе межотраслевой модели // Улан-Удэ: Вестник Бурятского государственного университета. Выпуск «Экономика. Право». – 2014. – № 2. – С. 37–39.

4. Колемаев В. А. Экономико-математическое моделирование. Моделирование макроэкономических процессов и систем. – М.:ЮНИТИ-ДАНА, 2005. – 295 с.

5. Математическая экономика на персональном компьютере: Пер.с яп./ М. Кубонива, М. Табата, С. Табата, Ю. Хасэбэ. – М.:Финансы и статистика, 1991. – 134 с.

6. Математические методы и модели исследования операций / Под ред. В.А. Колемаева. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2008. – 592 с.

7. Серебряков Г. Р., Узяков М. Н., Янтовский А. А. Межотраслевая модель экономики Ивановской области // Проблемы прогнозирования. – 2005. – № 2. – С. 64-74.

8. Sonis and Geoffrey J.D. Hewings. REAL 00-T-14 – December, 2000.

9. Ronald E. Miller and Peter D. Blair. Input-Output Analyses. Foundation and Extensions. – Second Edition. – Cambridge University Press. The Edinburg Building, Cambridge CB2 8RU, UK, 2009.

УДК 378.016:51

ПСИХОЛОГО-ПЕДАГОГИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РАЗВИТИЯ ПРОФЕССИОНАЛЬНОЙ КОМПЕТЕНТНОСТИ БУДУЩЕГО УЧИТЕЛЯ

© Иринчеев Анатолий Александрович
кандидат педагогических наук, старший преподаватель
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: airover@mail.ru

В статье рассматриваются вопросы методологии развития профессиональных компетентностей будущих учителей. Исследуется сущность понятия профессиональная компетентность, выявляются ее компоненты. Описывается структура педагогической компетентности учителя. Основными уровнями профессиональной компетентности становятся обученность, профессиональная подготовленность, профессиональный опыт и профессионализм. Профессиональная компетентность является необходимым условием профессионализма, но эти понятия не тождественны. Также не отождествляем профессиональную компетентность с профессиональными знаниями. Предлагаются способы формирования и совершенствования профессиональных компетенций будущих учителей.
Ключевые слова: компетентностный подход, профессиональные компетенции, педагогическая компетентность, педагогическая деятельность, методология, учитель математики.

PSYCHOLOGICAL AND PEDAGOGICAL BASES OF DEVELOPMENT OF PROFESSIONAL COMPETENCE OF THE FUTURE TEACHER

Anatoly A. Irincheev
Cand. Sci. (Pedagogical),
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

This article discusses the methodology of development of professional competence of future teachers. We study the essence of the concept of professional competence, identify its components. The structure of pedagogical competence of the teacher. The basic levels of professional competence are trained, professional experience, professional expertise and professionalism. Professional competence is a prerequisite of professionalism, but these concepts are not identical. Also, do not identify the professional competence with professional knowledge. Suggests ways of forming and improving professional skills of future teachers.
Keywords: competence approach, professional competence, pedagogical competence, pedagogical activities, methodology.

Профессиональная компетентность учителя является наряду с профессиональной направленностью и гибкостью интегральной характеристикой его личности. В настоящее время не существует точного определения как понятия компетентности вообще, так и понятия профессиональной ком-

петентности в частности, в том числе понятия компетентности учителя. Профессиональную компетентность в нашем исследовании мы будем обозначать термином «педагогическая компетентность».

Л.М. Митина под педагогической компетентностью понимает гармоничное сочетание знания предмета, методики и дидактики преподавания, умений и навыков (культуры) педагогического общения, а также приемов и средств саморазвития, самосовершенствования, самореализации [1]. В структуре педагогической компетентности она выделяет три подструктуры: деятельностную, коммуникативную и личностную.

А.В. Хуторской определяет компетентность через понятие компетенции [2]. По А.В. Хуторскому компетенция - отчужденное, заранее заданное социальное требование (норма) к образовательной подготовке ученика, необходимой для его эффективной продуктивной деятельности в определенной сфере.

Компетентность - владение, обладание учеником соответствующей компетенцией, включающее его личностное отношение к ней и предмету деятельности. Компетентность - уже состоявшееся качество личности (совокупность качеств) ученика и минимальный опыт деятельности в заданной сфере. Компетентность - совокупность личностных качеств ученика (ценностно-смысловых ориентаций, знаний, умений, навыков, способностей), обусловленных опытом его деятельности в определенной социально и личностно-значимой сфере.

Образовательная компетенция - требование к образовательной подготовке, выраженное совокупностью взаимосвязанных смысловых ориентаций, знаний, умений, навыков и опыта деятельности ученика по отношению к определенному кругу объектов реальной действительности, необходимых для осуществления личностно и социально значимой продуктивной деятельности.

Компетенции для ученика - это образ его будущего, ориентир для освоения. Но в период обучения у него формируются те или иные составляющие этих "взрослых" компетенций, и чтобы не только готовиться к будущему, но и жить в настоящем, он осваивает эти компетенции с образовательной точки зрения. Образовательные компетенции относятся не ко всем видам деятельности, в которых участвует человек, например, взрослый специалист, а только к тем, которые включены в состав общеобразовательных областей и учебных предметов. Такие компетенции отражают предметно-деятельностную составляющую общего образования и призваны обеспечивать комплексное достижение его целей.

И.А. Зимняя считает, что «…происходящие в мире и России изменения в области целей образования, соотносимые, в части, с глобальной задачей обеспечения вхождения человека в социальный мир, его продуктивную адаптацию в этом мире, вызывают необходимость постановки вопроса обеспечения образованием более полного, личностно- и социально-интегрированного результата. В качестве общего определения такого интегрального социально-личностно-поведенческого феномена как результата образования в совокупности мотивационно-ценностных, когнитив-

ных составляющих и выступило понятие «компетенция/компетентность» [3].

Определение понятия компетентность в системе образования предложил Ю.Г. Татур: "компетентность специалиста - это проявление на практике его стремления и способности (готовность) реализовать свой потенциал (знания, умения, опыт, личные качества и др.) для успешной творческой (продуктивной) деятельности в профессиональной и социальной сфере, осознавая социальную значимость и личную ответственность за результаты этой деятельности, необходимость ее постоянного совершенствования [4].

В настоящее время, по мнению И.А. Зимней, «образование столкнулось с достаточной трудной и неоднозначно решаемой исследователями задачей определения как содержания этого понятия, так и оснований разграничения ключевых компетенций и объема входящих в них компонентов. Это, в свою очередь, затрудняет и разработку подходов (процедур, критериев, инструментов) к их оценке как результату образования».

Образовательные компетенции дифференцируются по следующим уровням:

- ключевые (реализуемые на метапредметном, общем для всех предметов содержании);
- общепредметные (реализуемые на содержании, интегративном для совокупности предметов, образовательной области);
- предметные (формируемые в рамках отдельных предметов).

Компетентностный подход - это приоритетная ориентация на цели - векторы образования: обучаемость, самоопределение (самодетерминация), самоактуализация, социализация и развитие индивидуальности. В качестве инструментальных средств достижения этих целей выступают принципиально новые метаобразовательные конструкты: компетентности, компетенции и метакачества.

Компетентности - это содержательные обобщения теоретических и эмпирических знаний, представленных в форме понятий, принципов, смыслообразующих положений.

Компетенции - это обобщенные способы действий, обеспечивающих продуктивное выполнение профессиональной деятельности. Это способности человека реализовывать на практике свою компетентность.

Реализация компетентностного подхода требует создания новых учебных пособий, которые обеспечили бы достижение не только предметных, но и метапредметных результатов (способы познавательной, практической, коммуникативной и ценностно-ориентационной деятельности).

Перечень ключевых компетенций нуждается в детализации, как по возрастным ступеням обучения, так и по учебным предметам и образовательным областям. Разработка образовательных стандартов, программ и учебников по отдельным предметам должна учитывать комплексность представляемого в них содержания образования с точки зрения вклада в формирование ключевых компетенций. В каждом учебном предмете (образовательной области) следует определить необходимое и достаточное число связанных между собой реальных изучаемых объектов, формируе-

мых при этом знаний, умений, навыков и способов деятельности, составляющих содержание определенных компетенций.

Введение компетентностного подхода в учебный процесс требует серьезных изменений и в содержании образования, и в осуществлении учебного процесса, и в практике работы педагога.

Во-первых, целью обучения становится не процесс, а достижение учащимися определенного результата. Во-вторых, меняются формы и методы организации занятий - обучение приобретает деятельностный характер, акцент делается на обучение через практику, продуктивную работу учащихся в малых группах, выстраивание индивидуальных учебных траекторий, использование межпредметных связей, развитие самостоятельности учащихся и личной ответственности за принятие решений.

Поэтому измениться должны и механизмы доставки знаний от преподавателя к обучающемуся: приоритетным становится свободный доступ к информационным ресурсам, самообучение. Все эти формы обучения направлены на то, чтобы ввести ученика в социальные и профессиональные роли так, чтобы научить его быть успешным и в том и в другом. Это поможет ему затем самостоятельно повышать свой профессиональный уровень, обучаться на протяжении всей жизни.

Изменяется и роль преподавателя - он должен сам уметь общаться, ставить цели и мотивировать учащихся достигать их, учить проводить анализ и самоанализ, т.е. демонстрировать свое собственное компетентное поведение. А так как компетентность подразумевает деятельность, то педагог сам должен уметь эту деятельность организовывать.

Исходя из структуризации педагогической компетентности, осуществленной Л.М. Митиной, мы считаем необходимой и достаточной следующую совокупность компетенций, уровень овладения которыми будет определять уровень развития педагогической компетентности:

- деятельностная или специальная компетенция (знания, умения, навыки и индивидуальные способы самостоятельного и ответственного осуществления педагогической деятельности);
- личностная или профессиональная компетенция (знания, умения, навыки профессионального самосовершенствования и саморазвития);
- коммуникативная компетенция (знания, умения, навыки и способы творческого осуществления педагогического общения).

В применении к педагогической компетентности учителя математики деятельностная компетенция означает знание математики и методики обучения математике. Личностная компетенция учителя математики – знания, умения, навыки и способы самосовершенствования и саморазвития в обучении математике, развитие творческих способностей, исследовательская деятельность; коммуникативная компетенция учителя математики – способность творческого осуществления педагогического обучения, в частности, общения с учителями математики и учеными-математиками, расширение и обогащение математического языка, способов обучения на расстоянии (дистанционное обучение), освоение диалогического обучения с учениками на уроках математики. Указанные компетенции характеризуют личностно-ориентированный подход к обучению

математике как системе, его индивидуализацию, дифференциацию, гуманизацию и фундаментализацию. Каждая их этих компетенций в обучении математике в школе требует более глубокого анализа.

Деятельностная компетенция учителя математики ориентирована на овладение знаниями, умениями, навыками и индивидуальными способами самостоятельного и ответственного обучения математике. Деятельностная компетенция включает, прежде всего, математические знания. Самостоятельное и ответственное обучение математике невозможно без уверенного владения предметом, содержанием математического образования.

Личностная (или персональная) компетенция учителя математики означает овладение способностями к профессиональному самосовершенствованию и самореализации.

Учителей, стремящихся к самоактуализации, по оценке Психологического института РАО, всего 12-18%. Однако, потребность в реализации физических и психических сил наиболее актуальна в старшем школьном и студенческом периодах жизни. Единство потребности в деятельности и потребности в самореализации для юношей и девушек выражается в потребности в деятельностной самореализации или потребности самоактуализации в деятельности.

Коммуникативная компетенция.

Овладение коммуникативной компетенцией, а именно знаниями, умениями, навыками и способами творческого осуществления педагогического обучения, приводит к коммуникативной компетентности личности педагога. Системообразующим элементом коммуникативной компетентности является развитие профессионально значимых личностных качеств.

В меняющемся мире система образования должна формировать такие новые качества выпускника вуза как инициативность, инновационность, мобильность, гибкость, динамизм и конструктивность. Будущий профессионал должен обладать стремлением к самообразованию на протяжении всей жизни, владеть новыми технологиями и понимать возможности их использования, уметь принимать самостоятельные решения, адаптироваться в социальной и будущей профессиональной сфере, разрешать проблемы и работать в команде, быть готовым к перегрузкам, стрессовым ситуациям и уметь быстро из них выходить.

Литература

1. Митина Л.М. Психология труда и профессионального развития учителя: Учебное пособие для высших педагогических учебных заведений. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 320 с.

2. Хуторской А. Ключевые компетенции как компонент личностно-ориентированного образования // Народное образование. – 2003. – №2. – С.58-64.

3. Зимняя И.А. «Ключевые компетенции – новая парадигма результата образования» // Высшее образование. 2002.№5, с.34 – 42.

4. Татур, Ю. Г. Образовательная система в России: высшая школа / Ю. Г. Татур. - М.: Исследовательский центр проблем качества подготовки специалистов; Изд-во МГТУ им. Н. Э. Баумана, 1999. - 278 с.

References

1. Mitina L.M. Psychology of work and professional development of teachers: Textbook for higher educational institutions. – Moscow: Publishing center “Academy”, 2004. – 320 p.
2. Khutorskoy A. Key competences as a component of personality-oriented education // Folk education. – 2003. – No. – 2. – Pp. 58 – 64.
3. Zimnaya I.A. Key competence – a new paradigm of the result of education // Higher education. 2002. – No. 5. Pp. 34 – 42.
4. Tatur Yu. G. Educational system in Russia: higher school / Yu. G. Tatur. – M.: Research center of quality problems of specialists training; Publishing MGTU im. N. E. Bauman, 1999. – 278 p.

УДК 519.64, 517.51

ПОСТРОЕНИЕ КВАДРАТУРНЫХ ФОРМУЛ С УЧАСТИЕМ ПРОИЗВОДНЫХ

© Кожевина Марина Сергеевна
студент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: marina.kozhevina.97@mail.ru

© Цыренжапов Нима Булатович
кандидат физико-математических наук, доцент,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: nimac@mail.ru

В данной статье рассматриваются квадратурные формулы с участием производных. Данные формулы являются аналогами формулы Ньютона-Котеса, однако не могут быть получены непосредственным интегрированием формул Тейлора, так как содержат не один, а несколько узлов.
Ключевые слова: квадратурные формулы, ньютоновская система узлов, ряд Тейлора, ряд Маклорена, метод Симпсона.

CONSTRUCTION OF QUADRATURE FORMULAS INVOLVING DERIVATIVES

Marina S. Kozhevina
Student
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: marina.kozhevina.97@mail.ru

Nima B. Tsyrenzhapov
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: nimac@mail.ru

This article discusses quadrature formulas involving derivatives. These formulas are analogous to the Newton-Cotes formula, but they cannot be obtained by directly integrating Taylor formulas, since they contain not one, but several nodes.
Keywords: quadrature formulas, Newtonian knot system, Taylor series, Maclaurin series, Simpson method.

Постановка задачи

Рассмотрим элементарную квадратурную формулу общего вида

$$\int_0^1 \varphi(x)dx \cong \sum_{\gamma=0}^{G}\sum_{\alpha=0}^{\sigma} C_\gamma^\alpha \varphi^{(\alpha)}(\gamma), \qquad (1)$$

где G+1 – число точек, лежащих на оси OX, σ – порядок старшей производной.

Академик С.М. Никольский отмечает [2], что если нам известны не только значения функции, но и значения производных в узлах, то при правильном применении всех этих данных мы можем получить более точный ответ, чем в случае употребления только значений функции.

Известно, что при построении этой элементарной квадратурной формулы с участием производных возникает переопределенная линейная система, с помощью которой мы должны найти коэффициенты квадратурной формулы. В работе Урбаханова А.В. [3] был предложен следующий алгоритм устранения этой проблемы.

Во-первых, для нахождения приближенного значения определенного интеграла мы используем Ньютоновскую систему узлов, то M=N, где N – число узлов, M – число одночленов от n переменных, тогда $M = \frac{(m+n)!}{m!n!}$, где n – размерность, m – гладкость пространства.

При этом образуются следующие случай:

1. при известном m и G, неизвестном σ.
2. при известном m и σ, неизвестном G.
3. при известном σ и G, неизвестном m.

Пусть m – точность квадратурной формулы (1), m+1 – число всех одночленов, входящих в произвольный многочлен степени m, которое будет зависеть от выбора параметров G и σ, G+1 – число все узлов лежащих на оси абсцисс, σ+1 – число значений функции и ее производных в одной точке, то (G+1)(σ+1) – число всех коэффициентов формулы (1). Тогда точность m формулы (1) определяется из уравнения:

$$m+1=(G+1)(\sigma+1). \qquad (2)$$

Во-вторых, используем полученное уравнение связанности (2).

В-третьих, используем разложение функции в ряд Маклорена в операторной форме.

Теперь, когда при выполнении выше перечисленных условий, наша система будет иметь единственное решение, исследуем выбор параметров G и σ. Рассмотрим следующий пример, пусть G=2, σ=1. Тогда из формулы (2), получаем, что точность квадратурной формулы равна m=(2+1)(1+1)-1=5.

Тогда, элементарная квадратурная формула приобретает, следующий вид:

$$\int_0^1 f(x)dx \cong \sum_{\gamma=0}^{2}\sum_{\alpha=0}^{1} C_\gamma^\alpha d^\alpha f(\gamma) = C_0^0 f(0) + C_0^1 df(0) + C_1^0 f(1) + C_2^0 f(2) + C_1^1 df(1) + C_2^1 df(2).$$

Займемся подынтегральным выражением в левой части нашего равенства. Разложим функцию f(x) в ряд Маклорена в операторной форме [1] и вычислим интеграл от этой функции:

$$\int_0^1 e^{xd} dx = \frac{e^{xd}}{d}\Big|_0^1 = \frac{1}{d}\left(e^d - 1\right) = \frac{1}{d}\left(1 + \frac{d}{1!} + \frac{d}{2!} + \ldots + \frac{d^n}{n!} + \ldots - 1\right) = 1 + \frac{d}{2!} + \frac{d^2}{2!} + \ldots + \frac{d^n}{(n+1)!} + \ldots .$$

Используя, полученное разложение в операторной форме, вычислим значение функции и производных в точках в правой части нашего равенства. Затем, сократим обе части равенства на f(0),раскроем скобки, приравняем коэффициенты при соответствующих степенях d, а степень, которых больше чем m=5 приравняем нулю и запишем систему:

$$\begin{cases} C_0^0 + C_1^0 + C_2^0 = 1 \\ C_0^1 + C_1^0 + 2C_2^0 + C_1^1 + C_2^1 = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}C_1^0 + 2C_2^0 + C_1^1 + 2C_2^1 = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6}C_1^0 + \frac{4}{3}C_2^0 + \frac{1}{2}C_1^1 + 2C_2^1 = \frac{1}{24} \\ \frac{1}{24}C_1^0 + \frac{2}{3}C_2^0 + \frac{1}{6}C_1^1 + \frac{4}{3}C_2^1 = \frac{1}{120} \\ \frac{1}{120}C_1^0 + \frac{4}{15}C_2^0 + \frac{1}{24}C_1^1 + \frac{2}{3}C_2^1 = \frac{1}{720} \end{cases}$$

Решая систему линейных уравнений, получим следующие коэффициенты:

$$C_0^0 = \frac{101}{240};\ C_1^0 = \frac{8}{15};\ C_2^0 = \frac{11}{240};\ C_0^1 = \frac{13}{240};\ C_1^1 = -\frac{1}{6};\ C_2^1 = -\frac{1}{80}.$$

Квадратурная формула для данного случая будет иметь вид:

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{101}{240}f(0) + \frac{13}{240}f'(0) + \frac{8}{15}f(1) + \frac{11}{240}f(2) - \frac{1}{6}f'(1) - \frac{1}{80}f'(2).$$

Выше полученная формула точно интегрирует многочлены до шестой степени на участке от 0 до 1.

Построение квадратурной формулы с участием производных на произвольном участке интегрирования.

Рассмотрим интеграл $\int_a^b f(x)dx$, при тех же заданных параметрах G и σ что и выше. Из курса численного интегрирования известно, что данный

интеграл можно разбить на сумму N интегралов, где N – количество разбиений:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^{N} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx, \text{ где } a = x_0, \text{ а } x_i = a + i \cdot h \text{, h – шаг разбиения.}$$

Затем каждый полученный интеграл распишем по полученной элементарной квадратурной формуле выше, меняя при этом соответственно значения функции в точках. Далее произведем преобразования относительно коэффициентов и каждую сумму перед коэффициентами согласно виду усложненной квадратурной формулы, для точности вычисления умножим на уточняющее число $h^{\alpha+1}$, где α – порядок старшей производной у функции, стоящей после коэффициента [4]:

$$\int_a^b f(x)dx = C_0^0 \cdot h \cdot \sum_{i=1}^{N}(f(x_{i-1})) + C_0^1 \cdot h^2 \cdot \sum_{i=1}^{N}(f'(x_{i-1})) + C_1^0 \cdot h \cdot \sum_{i=1}^{N}(f(x_i)) +$$

$$C_2^0 \cdot h \cdot \sum_{i=1}^{N}(f(x_{i+1})) + C_1^1 \cdot h^2 \cdot \sum_{i=1}^{N}(f'(x_i)) + C_2^1 \cdot h^2 \cdot \sum_{i=1}^{N}(f'(x_{i+1})).$$

Значение коэффициентов C_γ^α берутся полученные для элементарной квадратурной формулы выше.

Таким образом, была получена квадратурная формула общего вида на произвольном отрезке интегрирования.

Вычислительные эксперименты

Для примера, пусть $f(x) = \cos(5x) + x^2$. Вычислим и сравним полученные значения по формуле численного интегрирования, в частности формуле Симпсона и полученной квадратурной формуле общего вида.

Сначала вычислим значения интеграла на участке интегрирования от 0 до 1 по формуле Ньютона-Лейбница:

$$\int_0^1 (\cos(5x) + x^2)dx = \left(\frac{\sin(5x)}{5} + \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^1 = \frac{\sin(5)}{5} + \frac{1}{3} = 0.1415484784007056.$$

Затем подсчитаем значение интеграла по полученной элементарной квадратурной формуле, вычислив при этом производную функции f(x):

$$\int_0^1 (\cos(5x)+x^2)dx = \frac{101}{240} f(0) + \frac{13}{240} f'(0) + \frac{8}{15} f(1) + \frac{11}{240} f(2) - \frac{1}{6} f'(1) - \frac{1}{80} f'(2) = 0.1415481184560771.$$

Теперь вычислим интеграл по формуле Симпсона, пусть количество разбиений равно 10, тогда h=0.1 :

$$\int_0^1 (\cos(5x) + x^2)dx = \frac{1}{30} \cdot (f(0) + 4 \cdot (f(0.1) + f(0.3) + f(0.5) + f(0.7) + f(0.9)) +$$

$$2 \cdot (f(0.2) + f(0.4) + f(0.6) + f(0.8)) + f(1)) \approx 0.1414798796177.$$

Явно видно, что погрешность вычисления квадратурной формулы заметно меньше, чем погрешность вычисления формулы Симпсона.

Ниже приведены примеры, подсчитанные на разных участках интегрирования и при разных шагах разбиения, результаты которых представлены в виде таблиц.

Вычисление интегралов на участке от 0 до 10

Таблица1. Квадратурная формула с участием производных.

Функция	N=10	N=100	N=1000	Точное значение
sin(5x)+5	49,880931981603766	50,007006787463759	50,007006794301631	50,00700679430158
sin(20x)+5x	253,02176562386444	250,02553463012944	250,02564061639444	250,0256406162496
x^2-1	$323,\underbrace{3\ldots3}_{13}$	$323,\underbrace{3\ldots3}_{11}25$	$323,\underbrace{3\ldots3}_{10}237$	$323,\underbrace{3\ldots3}_{13}$
x^4	20000,0	$19999,\underbrace{9\ldots9}_{9}8763$	$19999,\underbrace{9\ldots9}_{8}7667$	20000

Таблица 2. Формула Симпсона.

Функция	N=10	N=100	N=1000	Точное значение
sin(5x)+5	49,9721870422363	50,0070114135742	50,0069885253906	50,00700679430158
sin(20x)+5x	250,4508819580078	250,0297393798828	250,0256195068359	250,0256406162496
x^2-1	323,3333435058594	323,3333435058594	323,3332824707031	$323,\underbrace{3\ldots3}_{13}$
x^4	20001,33398437500	20000,00195312500	19999,99804687500	20000

Вычисление интегралов на участке от 0 до 20.

Таблица 3. Квадратурная формула с участием производных.

Функция	N=10	N=100	N=1000	Точное значение
sin(5x)+5	100,0989170223060	100,0275344954293	100,0275362255450	100,0275362255425
sin(20x)+5x	1014,9814857730604	1000,0517600614113	1000,0762648464236	1000,076264881693
x^2-1	$2646,\underbrace{6\ldots6}_{12}5$	$2646,\underbrace{6\ldots6}_{10}592$	$2646,\underbrace{6\ldots6}_{9}5888$	$2646,\underbrace{6\ldots6}_{12}7$
x^4	640000,0	$639999,\underbrace{9\ldots9}_{8}6419$	$639999,\underbrace{9\ldots9}_{7}05352$	640000

Таблица 4. Формула Симпсона.

Функция	N=10	N=100	N=1000	Точное значение
sin(5x)+5	99,8041305541992	100,0277175903320	100,0275573730469	100,0275362255425
sin(20x)+5x	1001,8192749023438	999,8190917968750	1000,0764160156250	1000,076264881693
x^2-1	2646,6667480468750	2646,6667480468750	2646,6662597656250	$2646,\underbrace{6\ldots6}_{12}7$
x^4	640042,68750	640000,06250	639999,9375	640000

Таким образом, построена квадратурная формула с участием производных более высокого порядка точности, чем известные формулы, например Симпсона.

Литература

1. Березин И.С. Методы вычислений: в 2-х т. /И.С. Березин ,Н.П. Жидков – Москва: Гос. изд. физ.-мат. лит-ры, 1959. – Т.1 – 464 с.
2. Никольский С.М. Квадратурные формулы. / С.М.Никольский. - Москва: Наука, 1974.- 224 с.
3. Урбаханов А.В. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида с узлами на ньютоновской решетке в пространстве Соболева $W_p^m(E_n)$: дис.на соиск. учен. степ. канд. физ.-мат. наук (01.01.07)/ Урбаханов Александр Валерьевич. – Улан-Удэ, 2005. – 97 с.
4. Цыренжапов Н.Б. Оценка погрешности кубатурных формул общего вида с с пограничным слоем и узлами на решетке в пространстве Соболева $L_p^m(E_n)$: дис. На соиск. канд. физ.-мат. наук (01.01.07) /Цыренжапов Нима Булатович. – Улан-Удэ, 2004. – 102 с.

References

1. Berezin, I. S. Methods of computation: in 2 volumes /I. S. Berezin ,N. P. Liquid – Moscow: Gos. ed. p.- mat. lit-ry, 1959. – Vol. 1 – 464 p.
2. 2. Nikolsky S. M. Quadrature formulas. / S. M. Nikolsky. - Moscow: Nauka, 1974. - 224 p.
3. Urbakhanov A. V. Estimation of error of cubature formulas of a General view with knots on Newtonian lattice in the Sobolev space $W_p^m(E_n)$: thesis for the degree of candidate of physical and mathematical Sciences (01.01.07)/ Urbakhanov Alexander Valeryevich. – Ulan-Ude, 2005. - 97 p.
4. Tsyrenzhapov N. B. Error estimation of cubature formulas of General form C with boundary layer and nodes on the lattice in Sobolev space $L_p^m(E_n)$: thesis for the degree of candidate of physical and mathematical Sciences (01.01.07) /Tsyrenzhapov Nima Bulatovich. – Ulan-Ude, 2004. - 102 p.

УДК 517.983+517.925.57

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ ОДНОРОДНЫХ ДАУ [1]

© Лакеев Анатолий Валентинович
доктор физико-математических наук, ведущий научный сотрудник
Институт динамики систем и теории управления имени В. М. Матросова СО РАН
Россия, 664033, Иркутск, ул. Лермонтова, 134
E-mail: lakeyev@icc.ru

Для однородного дифференциально-алгебраического уравнения в банаховом пространстве доказана эквивалентность равномерной асимптотической устойчивости наличию степенной или экспоненциальной асимптотики.
Ключевые слова: дифференциально-алгебраические уравнения в банаховом пространстве, равномерная асимптотическая устойчивость.

Anatoly V. Lakeyev
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Leading Researcher,
Matrosov Institute for System Dynamics and Control Theory
of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences (ISDCT SB RAS)
134 Lermontova St., Irkutsk, 664033, Russia
E-mail: lakeyev@icc.ru

Ordinary algebraic-differential equations in the Banach space have been studied, and equivalence of homogeneous asymptotic stability to the existence of the power or exponential asymptotics has been proved.
Keywords: algebraic-differential equations in the Banach space, homogeneous asymptotic stability.

Введение

Рассмотрим дифференциально-алгебраическое уравнение в банаховом пространстве E вида

$$A\dot{x} = f(t,x), \tag{1}$$

где $A : E \to E$ — линейный ограниченный (но необратимый) оператор, R^1 — множество вещественных чисел, $t \in R^1$ — время, функция $f : R^1 \times E \to E$ непрерывна.

Кроме того, предполагаем, что $f(t,0) \equiv 0$ для всех $t \in R^1$. Тогда для уравнения (1) существует решение, тождественно равное нулю.

Будем рассматривать для уравнения (1) свойство равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения [1-3], модифицированное для (1), с учетом возможности отсутствия решений соответствующей задачи Коши для некоторых начальных данных.

Более точно, будем обозначать $x(t,t_0,x_0)$ — решение задачи Коши

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 19-01-00301, 19-08-00746).

$$\begin{cases} A\dot{x} = f(t,x), \\ x(t_0) = x_{0,} \end{cases} \tag{2}$$

и $J(t_0,x_0) \subseteq [t_0,\infty)$ — максимальный правый интервал его существования. Через $H \subseteq R^1 \times E$ обозначим множество пар (t_0,x_0) таких, что решение $x(t,t_0,x_0)$ существует и через $B_\rho = \{x \in E \mid \|x\| < \rho\}$ — шар радиуса ρ.

Определение 1. Нулевое решение задачи Коши (2) будем называть равномерно асимптотически устойчивым, если оно

1) равномерно устойчиво:

$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall (t_0,x_0) \in H : x_0 \in B_\delta)(\forall x(\cdot,t_0,x))$

$(\forall t \in J(t_0,x_0))\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$,

т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon)$ такое, что для всех (t_0,x_0) таких, что $\|x_0\| < \delta$ и существует решение задачи Коши (2), для любого такого решения $x(\cdot,t_0,x_0)$ и любого $t \in J(t_0,x_0)$ выполняется оценка $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$;

2) равномерно притягивающее:

$(\exists \Delta > 0)(\forall \varepsilon > 0)(\exists T_0 \geq 0)(\forall (t_0,x_0) \in H : x_0 \in B_\Delta \wedge t_0 + T_0 \in J(t_0,x_0))$

$(\forall x(\cdot,t_0,x))(\forall t \in J(t_0,x_0) : t \geq t_0 + T_0)\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$,

т.е. для некоторого $\Delta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдется $T_0 = T_9(\varepsilon) \geq 0$ такое, что если существует решение задачи Коши (2) при некоторых (t_0,x_0), $\|x_0\| < \Delta$ и оно определено при $t \geq t_0 + T_0$, то $\|x(t,t_0,x_0)\| < \varepsilon$.

В работе [4] для однородных дифференциальных включений и в работах [5-7] для динамических систем, удовлетворяющих некоторому условию инвариантности решений (еще более общему, чем обобщенно-однородные системы В.И. Зубова [6]), было показано, что если для уравнений выполняется свойство равномерной асимптотической устойчивости, то сходимость решений к нулю будет либо экспоненциальной (вида $\|x(t,t_0,x_0)\| \leq Ce^{-\alpha(t-t_0)}$, $\alpha > 0$) либо степенной (вида $\|x(t,t_0,x_0)\| \leq C(t-t_0)^{-\alpha}$, $\alpha > 0$).

Цель данной работы — перенести эти результаты на уравнения вида (1).

Постановка задачи и основные теоремы

Введем следующее понятие.

Определение 2. Пусть $D : E \to E$ — линейный ограниченный оператор и $d \in R^1$. Будем говорить, что функция $f : R^1 \times E \to E$ (D,d)–инвариантна, если для любого $\tau \in R^1$ выполняется равенство

$$f(t,e^{\tau D}x) = e^{\tau(D+dI)}f(e^{d\tau}t,x), \tag{3}$$

где $e^{\tau D}$ — операторная экспонента, а I — тождественный оператор.

Пример. Если $E = R^n$ — конечномерно, $f(x) = (f_1(x),\ldots,f_n(x))$ — автономна и $D = \mathrm{diag}(d_1,\ldots,d_n)$ — диагональная матрица, то, полагая $c = e^{\tau} > 0$, условие (3) преобразуется к виду

$$f_i(c^{d_1}x_1,\ldots,c^{d_n}x_n) = c^{d_i+d} f_i(x_1,\ldots,x_n),\ \ i = 1,\ldots,n,$$

то есть получаем определение обобщенно-однородных систем В.И. Зубова [8].

Для уравнения (1) с (D,d)–инвариантной правой частью верно следующее утверждение.

Предложение. Если функция $f(t,x)$ (D,d)–инвариантна и операторы A и D перестановочны ($AD = DA$), то для любого решения $x(t,t_0,x_0)$ задачи Коши (2) и $\tau \in R^1$ функция $y(t) = e^{\tau D}x(e^{\tau d}t, e^{\tau d}t_0, x_0)$ тоже будет решением с начальными условиями $(e^{\tau d}t_0, e^{\tau D}x_0)$.

Из этого предложения, в частности, следует, что множество $H \subseteq R^1 \times E$ будет инвариантно относительно преобразования $(e^{\tau d}, e^{\tau D})$.

Теорема 1. Пусть для функции $f(t,x)$, операторов A, D и числа $d \in R^1$ выполняются следующие условия:

1) функция $f(t,x)$ (D,d)–инвариантна и операторы A и D перестановочны;

2) спектр оператора D не пересекается с мнимой осью.

Тогда если нулевое решение задачи Коши (2) будет равномерно асимптотически устойчивым, то существуют постоянные $C > 0$, $\alpha > 0$ и $b > 0$ такие, что при $(t_0,x_0) \in H$, $\|x_0\| < \Delta$ и любом $t \geq t_0$ выполняются оценки

1) если $d = 0$, то $\|x(t,t_0,x_0)\| \leq Ce^{-\alpha(t-t_0)}$,

2) если $d \neq 0$, то $\|x(t,t_0,x_0)\| \leq C(1+b(t-t_0))^{-\alpha}$.

Заметим, что если $\lambda \in R^1$, $\lambda \neq 0$, то (D,d)–инвариантность функции $f(t,x)$ эквивалентна $(\lambda D, \lambda d)$–инвариантности. При этом очевидно, что операторы A и D перестановочны тогда и только тогда, когда операторы A и $D\lambda$ перестановочны. Поэтому без ограничения общности можно рассматривать только $(D,0)$–инвариантные и $(D,1)$–инвариантные системы.

Известно [1], что область притяжения даже для обобщенно-однородных систем В.И. Зубова может быть неограниченной, но при этом не совпадать со всем пространством. Однако, если спектр оператора D лежит по одну сторону от мнимой оси, то область притяжения будет совпадать с H. Более точно верны следующие утверждения.

Теорема 2. Пусть для функции $f(t,x)$ и операторов A, D выполняются следующие условия:

1) функция $f(t,x)$ $(D,0)$–инвариантна и операторы A и D перестановочны;

2) спектр оператора D лежит по одну сторону от мнимой оси.

Тогда если нулевое решение задачи Коши (2) будет равномерно асимптотически устойчивым, то существуют постоянные $C_1, C_2, \beta_1, \beta_2 > 0$, $\beta_1 \le 1 \le \beta_2$, $\tau_0 \ge 0$ ($C_1\tau_0^{\beta_1} = C_2\tau_0^{\beta_2}$) и $\alpha > 0$ такие, что при $(t_0, x_0) \in H$ и любом $t \ge t_0$ выполняются оценки

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \le \begin{cases} C_1\|x_0\|^{\beta_1} e^{-\alpha(t-t_0)}, & \text{если } \|x_0\| \le \tau_0, \\ C_2\|x_0\|^{\beta_2} e^{-\alpha(t-t_0)}, & \text{если } \tau_0 \le \|x_0\|. \end{cases}$$

Уточним теперь теорему 1 для $(D,1)$–инвариантных систем. Известно [9], что если спектр линейного ограниченного оператора $D: E \to E$ не пересекается с мнимой осью, то можно определить разложение E в прямую сумму подпространств E_+ и E_- ($E = E_+ \oplus E_-$), где $E_+ = \{x \in E \mid \lim\limits_{\tau \to -\infty} e^{\tau D}x = 0\}$, $E_- = \{x \in E \mid \lim\limits_{\tau \to +\infty} e^{\tau D}x = 0\}$.

Теорема 3. Пусть для функции $f(t,x)$ и операторов A, D выполняются следующие условия:

1) функция $f(t,x)$ $(D,1)$–инвариантна и операторы A и D перестановочны;

2) спектр оператора D не пересекается с мнимой осью.

Тогда если нулевое решение задачи Коши (2) будет равномерно асимптотически устойчивым, то

а) существует $T_0 \ge 0$ такое, что для всех $(t_0, x_0) \in H$, $\|x_0\| < \Delta$ будет $x(t_0 + T_0, t_0, x_0) \in E_+$ и E_+ инвариантно относительно $x(t,t_0,x_0)$, т.е. если $(t_0, x_0) \in H$ и $x_0 \in E_+$, то $x(t,t_0,x_0) \in E_+$ для всех $t \ge t_0$;

б) существуют постоянные $C_1, C_2 > 0$, $\alpha, \beta > 0$ и $b > 0$ такие, что при $(t_0, x_0) \in H$, $\|x_0\| < \Delta$ и любом $t \ge t_0$ выполняется оценка

$$\|x(t,t_0,x_0)\| \le C_1(1 + b(t-t_0))^{-\alpha} + C_2(\max\{t_0 + T_0 - t, 0\})^{\beta}.$$

Кроме того, если спектр оператора D лежит по одну сторону от мнимой оси, то можно показать, что также, как в теореме 2, будет выполняться асимптотическая устойчивость в целом (т.е. при $\Delta = \infty$).

Литература

1. Зубов В.И. Методы А.М. Ляпунова и их применения. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1957. 241 с.

2. Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. Метод сравнения в математической теории систем. Новосибирск: Наука, 1980. 480 с.

3. Абетс П., Руш Н., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 294 с.

4. Филиппов А.Ф. Устойчивость для дифференциальных уравнений с разрывными и многозначными правыми частями // Дифференц. уравнения. 1979. Т. 15, № 6. С. 1018–1027.

5. Лакеев А.В. Об асимптотической устойчивости однородных полупотоков // Метод функций Ляпунова и его приложения. Новосибирск: Наука, 1984. С. 138–143.

6. Лакеев А.В. Об асимптотической устойчивости (A,m)-инвариантных полупотоков / Тез. докл. VII Всесоюзной конф. "Качественная теория дифференциальных уравнений", Рига, 1989. С.141.

7. Лакеев А.В. Об асимптотической устойчивости однородных многозначных полупотоков / Международный семинар "Устойчивость и колебания нелинейных систем управления". Тез. докл., Москва, 1992. С.28.

8. Зубов В.И. О системах обыкновенных дифференциальных уравнений с обобщенно-однородными правыми частями // Изв. вузов. Математика. 1958. № I(2). С. 80–88.

9. Крейн М.Г. Лекции по теории устойчивости решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Киев: Изд-во ИМ АН УССР, 1964. 277 с.

References

1. Zubov V.I. A.M. Lyapunov's Methods and Their Applications. Leningrad: Leningrad University Publ., 1957. 241 p. (in Russian)

2. Matrosov V.M., Analopsky L.Yu., Vassilyev S.N. The Comparison Method in the Mathematical Systems Theory. Novosibirsk: Nauka Publ., 1980. 480 p. (in Russian)

3. Habets P., Routh N., Laloy M. The Direct Lyapunov's Method in Stability Theory. Moscow: Mir Publ., 1980. 294 p. (in Russian)

4. Filippov A.F. Stability for differential equations with discontinuous and multi-valued right-hand sides // Differential Equations. 1979. T. 15, № 6. pp. 1018–1027. (in Russian)

5. Lakeyev A.V. On asymptotic stability of homogeneous semiflows // The Method of Lyapunov Functions and Its Applications. Novosibirsk: Nauka Publ., 1984. pp. 138–143. (in Russian)

6. Lakeyev A.V. On asymptotic stability of (A,m)-invariant semiflows / Proc. of the VII All-Union Conference "Qualitative Theory of Differential Equations", Рига, 1989. p. 141. (in Russian)

7. Lakeyev A.V. On asymptotic stability homogeneous multi-valued semiflows / Proc. of International Symposium "Stability and Oscillations of Nonlinear Control Systems". Moscow, 1992. p. 28. (in Russian)

8. Zubov V.I. On systems of ordinary differential equations with generalized-uniform right-hand sides // Izvestiya Vuzov. Mathematics. 1958. No. 1(2). pp. 80–88. (in Russian)

9. Krein M.G. Lectures on the Stability Theory of Solutions for the differential equations in the Banach space. Kiiv: Institute of Mathematics, Ukranian Academy of Sciences Publishing, 1964. 277 p. (in Russian)

УДК 519.6

ОБ ОДНОЙ ФОРМАЛЬНОЙ МОДЕЛИ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

© Николаева Дарима Доржиевна
научный сотрудник,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: darisha89@yandex.ru

В работе рассматривается возможность моделирования динамических систем в терминах функциональных грамматик. Программу, моделирующую динамическую систему можно представить как суперпозицию базисных функций. В статье также рассматривается операция отождествления, которая является существенной при разработке моделирующих программ и которая увеличивает выразительную мощность при построении математических моделей. Рассмотрен фрагмент компьютерной программы, на котором выполнена операция отождествления и получен терм — суперпозиция базисных функций, а также проиллюстрировано дерево компьютерной программы, в узлах которой находятся базисные функции.
Ключевые слова: динамические системы, моделирование, математическая модель языка, универсальная алгебра, функциональная грамматика, операция отождествления, семантика.

ABOUT A FORMAL MODEL OF DYNAMIC SYSTEMS

Darima D. Nikolaeva
research scientist,
Buryat State University named after D. Banzarov
24a Smolina St., 670000, Ulan-Ude, Russia
E-mail: darisha89@yandex.ru

The paper considers the possibility of modeling dynamic systems in terms of functional grammars. A program that simulates a dynamic system can be represented as a superposition of basic functions. The article also considers the identification operation, which is essential in the development of modeling programs and which increases the expressive power in the construction of mathematical models. A fragment of a computer program on which the identification operation is performed and a term — superposition of the basis functions is obtained is considered, as well as a tree of the computer program is illustrated, in the nodes of which the basis functions are found.
Keywords: dynamic systems, modeling, mathematical model of language, universal algebra, functional grammar, operation of identification, semantics.

1. Постановка задачи

Пусть задана конкретная динамическая система, то, естественно, можно представить компьютерную программу, которая порождает процесс моделирования работы динамической системы. Стоит задача, моделировать работу динамической системы на компьютере. Для компьютерного моде-

лирования требуется разработать компьютерную программу. Разработанная программа должна порождать в памяти компьютера процесс моделирования работы динамической системы. Для разработки компьютерной программы требуется построить формальную математическую модель данной программы. Для построения формальной математической модели программы используется аппарат функциональных грамматик. Опираясь, на формальную математическую модель языка программирования в виде универсальной алгебры (M,Ω) разрабатывается формальная математическая модель программы, которая представляется в виде алгебраического терма сигнатуры Ω. Формальная математическая модель определяет класс эквивалентных компьютерных программ.

Пусть задан конкретный и известный язык программирования L (Pascal, Си ++ и т.д.). Математическая модель языка программирования представляется в виде универсальной алгебры при помощи аппарата функциональных грамматик.

Основание функциональных грамматик состоит из следующих примитивов:

1. Контекстно-свободная грамматика: алгоритм синтаксического анализа, выводы, сентенциональные фразы и выводы из них и т.д.

2. Операция левого отождествления.

3. Операция выбора «либо» $|$.

4. Рекурсия.

5. Многоуровневость G_1, G_2 и т.д.

6. Суперпозиция (есть дерево в узлах которого стоят функции). Если функция, находящаяся в узле дает результат, имеющий метатип **знач**, то данный результат передается по выходной ветви узла дерева, как аргумент к следующей функции.

7. Операция Eval (первый аргумент есть функция, второй аргумент исходные данные этой функции). Eval применяет функцию к исходным данным и получает результат. Данный результат имеет метатип **знач**.

8. Метатип **знач** является типом результата при выполнения функции.

9. Метатип **функ** это есть тип композиций функций.

10. Метатип **текст** это есть текст программы в заданном языке.

11. Арифметические операции. В языке считаются заданными: множество целых чисел; операции сложения, вычитания, умножения и целочисленного деления в десятичной арифметике и операции сравнения <, ≤, =, ≥, >.

С точки зрения универсальной алгебры язык L будет представлять собой конечную совокупность $\{\Phi i\}_{i\in\mathbb{N}}$, которая будет являться сигнатурой операций алгебры. Тогда любая программа $x \in L$ будет представляться с помощью синтаксической грамматики G_0 в виде суперпозиции базисных функций из сигнатуры алгебры $\{\Phi i\}_{i\in\mathbb{N}}$.

Если программа x не содержит синтаксических ошибок и синтаксический разбор пройдет успешно, то получим алгебраический терм, который является семантикой программы x. Программа x является отображением их входных данных в выходные данные. Суперпозиция базисных функций программы x (алгебраический терм) является математической моделью данной программы x, а семантика языка программирования представляет собой универсальную алгебру A с сигнатурой операций $\Omega = \{\Phi i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Таким образом, если L это множество синтаксически правильных программ типа (текст), $T(\Omega)$ множество суперпозиций базисных функций из Ω, σ - алгоритм синтаксического разбора, то $\sigma : L \to T(\Omega)$ взаимнодноznачное отображение, $\forall x \in L \;\; \sigma(x) \in T(\Omega)$.

Из примитивов наиболее интересным и существенным является операция отождествления. Операцию отождествления для формальных грамматик впервые ввел Виталий Алексеевич Тузов [1,2].

Пусть φ, ψ — слова в алфавите $V_N \cup V_T$ (сентенциальные формы грамматики G), где нетерминальные символы помечены индексами, которые являются формальными параметрами операции отождествления. Тогда операция отождествления синтаксически представляется в виде $(\varphi)\psi$ и содержательно определяется как отображение совокупности входных формальных параметров, принадлежащих к φ, на совокупность выходных (т.е. результирующих) формальных параметров, входящих в ψ. Семантически операция отождествления $(\varphi)\psi$ трактуется так: если x – фактический аргумент этой операции, то строится вывод $\varphi \Rightarrow^{*} x$ этого слова в грамматике G_M. Тогда нетерминальные символы слова φ получают в качестве значений некоторые подслова слова x (одинаковые нетерминалы, помеченные одинаковыми символами, должны принимать одни и те же значения), слово ψ, определяет результат этой операции [1].

Все операции начинаются с исходных данных (что дано). Любая операция имеет исходные данные и результат. Сказанное продемонстрируем на примере.

Пусть задана грамматика $G=(V_N, V_T, P, A)$, где $A \in V_N$ − начальный нетерминальный символ.

Обозначим за: φ – исходные данные, ψ – схема получения результата.

Синтаксически операция отождествления выглядит следующим образом:

$$(\varphi)\psi\ , \qquad \text{где } \varphi, \psi \in (V_N \cup V_T)^*\ .$$

Рассмотрим подробнее исходные данные операции отождествления на примере:

$$\varphi = N_1\tau_1\, N_2\tau_2\, N_3\tau_3\ , \quad \text{где } N_i \in V_N\ ,\ \tau_i \in V_T^*\ .$$

(в более общем случае $\varphi = N_1\tau_1\, N_2\tau_2\, \ldots N_m\tau_m$). Отметим, что φ называется сентенциональной строкой грамматики G . Рассмотрим строку $x \in V_T^*$ в данной грамматике G . Запись

$$\varphi \Rightarrow_*^G x$$

будет обозначать вывод из сентенциональной строки $\varphi \in (V_N \cup V_T)^*$ в строку x , состоящую из терминальных символов V_T , т.е. $(x \in V_T^*)$. На рисунке вывод $\varphi \Rightarrow_*^G x$ будет иметь вид:

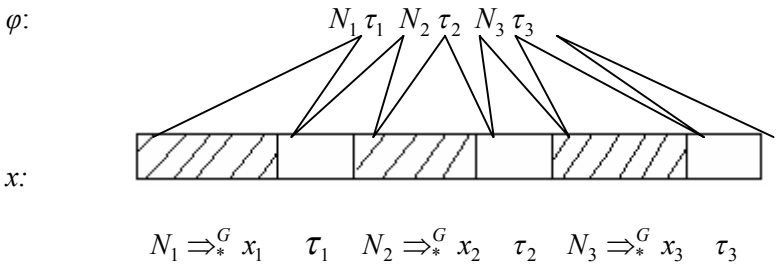


рис. 1

На этой диаграмме x_i $(\overline{i=1,3})$ являются подстрокой строки x . Процесс вывода начинается слева направо по очереди: $N_1 \Rightarrow_*^G x_1$, затем тождественное отображение $\tau_1 \in V_T^*$ переходит на остаток строки x справа от x_1.

Затем $N_2 \Rightarrow_*^G x_2$ и т.д. из рисунка понятно. Этот грамматический разбор является левым, т.к. разбор начинается слева направо и задает однозначность операции отождествления. В результате этого разбора (на данном этапе) нетерминалы получают след значения: $N_1 = x_1$, $N_2 = x_2$, $N_3 = x_3$. Так как множество нетерминалов из φ содержит множество нетерминалов ψ, то ψ получают однозначное значение: $N(\varphi) \supseteq N(\psi)$.

Все выше изложенное легко можно обобщить для m-го порядка:

$\varphi = N_1\tau_1\ N_2\tau_2 \ldots N_{m-1}\tau_{m-1}\ N_m\tau_m$, где $\tau_i \in V_T^*$ (м.б. пустой строкой)

$\psi = t_1 N_{i_1} \ldots t_{i_{m-1}} N_{i_m} t_{i_m}$, где t_{i_j} - могут быть пустыми строками.

$$\underbrace{\{N_1, N_2, \ldots, N_m\}}_{\varphi} \supseteq \underbrace{\{N_{i_1}, N_{i_2}, \ldots, N_{i_m}\}}_{\psi}.$$

Областью определения операции отождествления является множество $D_\varphi = \{x \mid x \in V_T^*, \varphi \Rightarrow_*^G x\}$.

Продемонстрируем на содержательном примере применение операции отождествления. Для этого рассмотрим фрагмент программы:

начало

имя имя цел S, SQ ; \\ <описания> Ф2

S := 2; SQ := 1; \\ <операторы> < программа> Ф1

SQ := SQ + S \\

конец.

Интуитивно понятно, что это отображение исходных данных на множество результативных данных $\Phi 1 : D_\varphi \to D_\psi$ (D_φ - область определения, D_ψ - область результативных значений).

Естественным было бы рассмотреть отображение всей программы $\Phi 1$ как композицию функций. Поскольку синтаксис программы подчиняется синтаксическому правилу,

<программа> : := **начало** <описания> ; <операторы> **конец**
$\Phi 1$

которое разбивает программу на два раздела <описания> и <операторы>, то естественным было бы построить отдельную функцию для <описания> − $\Phi 2$ и <операторы> − $\Phi 4$. Тогда функция $\Phi 1$ является композицией функцией $\Phi 2$ и $\Phi 4$: $\Phi 1 = \Phi 2 \circ \Phi 4$ (прим. композиция выполняется слева направо, обычно в математике $\Phi 1 = \Phi 4(\Phi 2($исходные данные)).

Эту идею разбивки отображений и предложений в виде композиций более «мелких» функций можно рекурсивно продолжить по правилам синтаксической грамматики. Рассмотрим дерево грамматики:

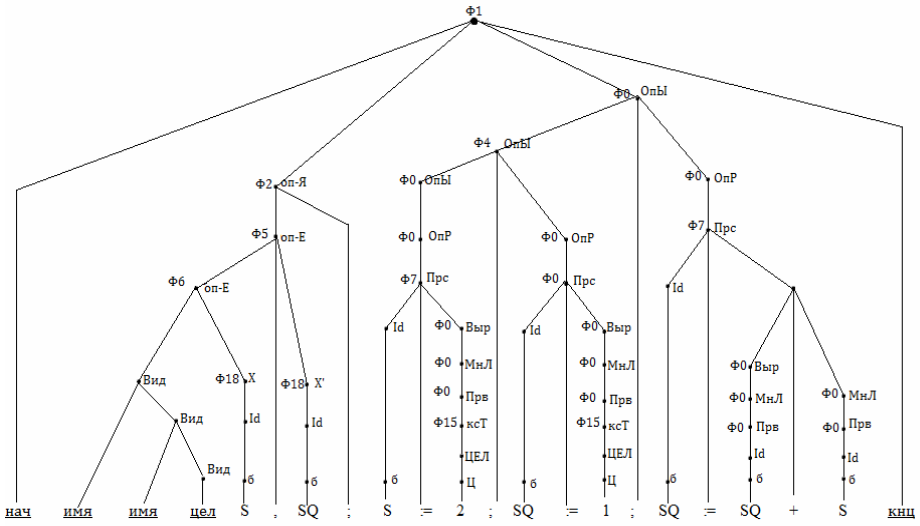


рис. 1

Заключение

В данной работе разработан подход к компьютерному моделированию динамических систем с помощью функциональных грамматик. Компьютерную программу удалось представить как суперпозицию базисных функций. В работе рассмотрена операция отождествления, которая является существенной при разработке моделирующих программ. Представлен фрагмент компьютерной программы, на которой выполнена операция отождествления и получен терм − суперпозиция базисных функций. Также построено дерево компьютерной программы, в узлах которой находятся базисные функции.

Литература

1. Тузов В. А. Математическая модель языка. Л-д: ЛГУ, 1984. 176 с.
2. Тузов В. А. Подход к построению универсальной схемы языка. Синтаксис. Программирование. 1980. №5. С. 17–25.

References

1. Tuzov V. A. Mathematical model of language. L-d: LSU, 1984. 176 p.
2. Tuzov V. A. Approach to the construction of a universal scheme of language. Syntax. Programming. 1980. No. 5. P. 17-25.

УДК 517.968.73+517.983.51

СЛАБОСИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ: РАЗРЕШИМОСТЬ НАЧАЛЬНЫХ ЗАДАЧ И ПРИЛОЖЕНИЯ [1]

© Орлов Сергей Сергеевич
кандидат физико-математических наук, доцент
кафедра математического анализа и дифференциальных уравнений
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, Иркутск, б-р Гагарина, 20
E-mail: orlov_sergey@inbox.ru

В докладе планируется изложить результаты исследования вопроса однозначной разрешимости начальных задач для специальных классов вырожденных линейных интегро-дифференциальных уравнений. Ядра рассматриваемых уравнений имеют вид

$$K(t,s)=\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}A,$$

$\Gamma(\alpha)$ – гамма-функция Эйлера аргумента $0<\alpha<1$, A – линейный оператор. В современной научной литературе интегральные и интегро-дифференциальные уравнения со слабой (интегрируемой) степенной особенностью называют уравнениями *типа Абеля*. Под вырождением понимается наличие необратимого оператора при старшей производной. В данной работе он предполагается *фредгольмовым*. Хорошо известно, что начальные задачи для вырожденных интегро-дифференциальных уравнений имеют *классические* решения не при любых входных данных: операторных коэффициентах, свободной функции уравнения, начальных условиях. Первичной проблемой в подобных исследованиях является поиск условий, при которых имеет место однозначная разрешимость. Этому и посвящен предполагаемый доклад. Изучаемые абстрактные уравнения представляют интерес с точки зрения приложений, поскольку с общих позиций позволяют исследовать начально-краевые задачи для интегро-дифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в наследственной механике сплошных сред. Примерами таких задач иллюстрируются полученные в работе результаты.

***Ключевые слова**:* интегро-дифференциальное уравнение типа Абеля, банахово пространство, оператор Римана–Лиувилля дифференцирования дробного порядка, распределение, фундаментальное решение.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 18-01-00643 А и № 18-51-54001 Вьет_а

УДК 517.17+517.51

О ПРЕДСТАВЛЕНИИ КРАТНОГО ИНТЕГРАЛА ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ПЕРЕМЕННЫХ

© Орлов Сергей Сергеевич
кандидат физико-математических наук, доцент
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, Иркутск, б-р Гагарина, 20
E-mail: orlov_sergey@inbox.ru

© Соколова Галина Константиновна
студент
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, Иркутск, б-р Гагарина, 20
E-mail: 98gal@mail.ru

Математическое моделирование самоподобных объектов и их свойств, а также различных явлений, повторяющихся во времени и пространстве, естественным образом приводит к понятию периодической функции нескольких переменных. Сами математические модели имеют вид начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Представляемая заметка посвящена исследованию основных свойств периодических функций нескольких переменных. Сформулированы теоремы, которые могут быть применены для построения периодических решений дифференциальных уравнений в частных производных. Без ограничения общности, рассматриваются периодические функции, имеющие в качестве множества периодов прямоугольную решётку. Учитывается вырожденный случай свойства периодичности – постоянство функции. Формулируются теоремы интегрального исчисления таких функций. В частности, обобщена лемма о представлении интеграла периодической функции одной переменной в виде суммы линейной и периодической функций. Указана аналогичная форма для кратного интеграла с переменными верхними пределами.
Ключевые слова: периодическая функция нескольких действительных переменных, основной период в данном направлении, m-мерная решётка периодов.

ON THE REPRESENTATION OF THE MULTIPLE INTEGRAL OF PERIODIC FUNCTION OF SEVERAL REAL VARIABLES

Sergey S. Orlov
Cand. Sci. (Phis. and Math.), A/Prof,
Irkutsk State University,
20 Gagarin Blvd., Irkutsk 664003, Russia

Galina K. Sokolova
Student
Irkutsk State University,
20 Gagarin Blvd, Irkutsk 664003, Russia

The concept of periodic function of several variables occur naturally from mathematical description of self-similar objects and repetitive processes in time and space. Mathematical models of such systems are initial boundary value problems for the partial differential equations. This note deals with basic properties of periodic functions of several real variables. The theorems that can be applied to construction of periodic solutions of the partial differential equations are formulated. Without loss of generality, we consider periodic functions with a rectangular lattice as the set of periods. The constancy of the function is considered as a case of periodicity. The theorems of integral calculus of these functions are formulated. The Lemma on the representation of the integral of a periodic function of one variable as a sum of linear and periodic functions is generalized to the multidimensional case. The form for a multiple integral with variable upper boundaries is obtained.
Keywords: periodic functions of several variables, a basic period of function along a given unit vector, *m*-dimensional lattice of periods

1. Постановка задачи

Большую роль в исследовании проблемы существования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений играет следующая лемма, доказанная в монографии [1, с. 57] Н. П. Еругина.

Лемма. Пусть функция $f \in C_{[0,+\infty)}$ является периодической с периодом T, тогда

$$\int_0^x f(t)dt = \omega_T[f]\, x + \varepsilon(x), \qquad (1)$$

где $\omega_T[f] = \dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)dt$ – среднее значение функции f на отрезке $[0, T]$, функция $\varepsilon : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ периодическая с периодом T.

Как показано в работе [2], представление (1) однозначно и инвариантно относительно выбора периода T функции f, а функция ε наследует её основной период.

2. Основные теоремы

Определение. Функция $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ называется *периодической* с периодом $\mathbf{T}$, если существует вектор $\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$, что для всех $\mathbf{r} \in \mathrm{R}^n$ выполняется равенство $f(\mathbf{r} + \mathbf{T}) = f(\mathbf{r})$. Период $\mathbf{T}_0$ наименьшего модуля, сонаправленный с вектором $\mathbf{T}$, будем называть *основным* периодом функции в направлении $\mathbf{t}$, где $\mathbf{T} = |\mathbf{T}|\,\mathbf{t}$.

В статье [3] показано, что множество P_f периодов произвольной периодической функции $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ имеет вид

$$\mathrm{P}_f = \Lambda(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_{m_1}) \oplus \mathrm{span}\,(\mathbf{t}_{m_1+1}, \mathbf{t}_{m_1+2}, \ldots, \mathbf{t}_{m_1+m_2}),$$

где $\mathbf{T}_k$ – базисные векторы m_1-мерной решётки [4], $\mathbf{t}_k$ – направления постоянства функции, и $m_1 + m_2 \le n$. Кроме того, невырожденным линейным преобразованием $A : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ аргумента $\mathbf{r} \in \mathrm{R}^n$ всякую периодическую функцию n переменных можно сделать периодической по первым

m_1 переменным и постоянной по следующим m_2 переменным [3]. Таким образом, без ограничения общности, всякую периодическую функцию n аргументов можно считать периодической по первым m_1 переменным и постоянной по следующим m_2 переменным.

В работе [5] доказана следующая теорема.

Теорема 1. Пусть функция $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ является непрерывной по переменной x_i и периодической по этой переменной с основным периодом T_i, тогда справедливо равенство

$$\int_0^{x_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, \ldots, x_n)dt = S_{T_i}[f]\, x_i + \varepsilon_i(\mathbf{r}), \qquad (2)$$

где $S_{T_i}[f] = \dfrac{1}{T_i}\int_0^{T_i} f(x_1, \ldots, x_{i-1}, t, \ldots, x_n)dt$ – среднее значение функции f по переменной x_i на отрезке $[0, T_i]$, $\varepsilon_i : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ – T_i-периодическая функция по переменной x_i.

Заметим, что если $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ является непрерывной по переменной x_i, то $\varepsilon : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ имеет непрерывную по этой переменной частную производную. Справедливо уравнение $\varepsilon_{x_i} = f(\mathbf{r}) - S_{T_i}[f]$, с условием $\varepsilon(\mathbf{r})\big|_{x_i=0} = 0$. Однозначная разрешимость этой задачи гарантирует единственность представления (2). Также, если функция $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ является постоянной по переменной x_i, получим уравнение $\varepsilon_{x_i} = 0$, которое при условии $\varepsilon(\mathbf{r})\big|_{x_i=0} = 0$ имеет решение $\varepsilon(\mathbf{r}) \equiv 0$. В противном случае, функция $\varepsilon : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ наследует основной период T_i функции f по переменной x_i.

Пример 1. Рассмотрим непрерывную и 2π-периодическую по переменной y функцию $f : \mathrm{R}^3 \to \mathrm{R}$ вида $(x, y, z) \to \cos x + \sin y \cos z$. Тогда

$$\int_0^{y} f(x, t, z)dt = y\cos x + \cos z\,(1 - \cos y).$$

В обозначениях теоремы 1 получаем

$$S_{T_y}[f] = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos x + \sin y \cos z)dy = \cos x,\ \varepsilon(x, y, z) = \cos z(1 - \cos y).$$

Заметим, что функция ε наследует основной период по переменной y подынтегральной функции f.

Прямым следствием теоремы 1 является следующая теорема.

Теорема 2. Пусть функция $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ является непрерывно дифференцируемой по переменной x_i и периодической по этой переменной с

основным периодом T_i, тогда частная производная $\partial_{x_i} f$ также является T_i-периодической по переменной x_i.

Далее приведём обобщение теоремы 1 справедливое для функции $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ с m_1-мерной решёткой периодов.

Теорема 3. Пусть функция $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ является непрерывной по переменным $x_1, x_2, \ldots, x_{m_1}$ и периодической с прямоугольной решёткой периодов $\Lambda(\mathbf{T}_1, \mathbf{T}_2, \ldots, \mathbf{T}_{m_1})$, порождённой векторами $\mathbf{T}_i = T_i \mathbf{e}_i$, $i = 1, \ldots, m_1$, тогда справедливо равенство

$$\int\limits_{P_{J_{m_1}}} f(t_1, \ldots, t_{m_1}, x_{m_1+1}, \ldots, x_n) dt_1 \ldots dt_{m_1} =$$

$$= \sum_{k=1}^{m_1-1} (-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le m_1} \prod_{i \in J_{m_1} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}} x_i \int\limits_{P_{i_1, \ldots, i_k}} S_{J_{m_1} \setminus \{i_1, \ldots, i_k\}}[f] \, dt_{i_1} \ldots dt_{i_k} + \qquad (3)$$

$$+ (-1)^{m_1 - 1} \prod_{i \in J_{m_1}} x_i S_{J_{m_1}}[f] + \varepsilon(\mathbf{r}),$$

где $P_{i_1, \ldots, i_k} = [0; x_{i_1}] \times \ldots \times [0; x_{i_k}]$ обозначает i_k-мерный параллелепипед, а $J_{m_1} = \{1, 2, \ldots, m_1\}$ – множество индексов, выражение

$$S_{i_1, \ldots, i_k}[f] = \frac{1}{\mu(P_{\Lambda(\mathbf{T}_{i_1}, \ldots, \mathbf{T}_{i_k})})} \int\limits_{P_{\Lambda(\mathbf{T}_{i_1}, \ldots, \mathbf{T}_{i_k})}} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) dx_{i_1} \ldots dx_{i_k}$$

задаёт среднее значение функции $f : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ по переменным $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ на фундаментальном параллелепипеде $P_{\Lambda(\mathbf{T}_{i_1}, \ldots, \mathbf{T}_{i_k})}$ решётки $\Lambda(\mathbf{T}_{i_1}, \ldots, \mathbf{T}_{i_k})$, $\varepsilon : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ – периодическая функция с множеством периодов $\mathrm{P}_\varepsilon \supseteq \Lambda(\mathbf{T}_{i_1}, \ldots, \mathbf{T}_{i_{m_1}})$.

Несмотря на громоздкий вид, формула (3) имеет понятную структуру и напоминает формулу включения-исключения из теории множеств. Рассмотрим её частный случай при $n = 2$ и $m_1 = 2$.

Следствие. Пусть функция $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ является непрерывной по переменным x и y и периодической с решёткой периодов, порождённой векторами $\mathbf{T}_x = T_x \mathbf{i}$ и $\mathbf{T}_y = T_y \mathbf{j}$, тогда справедливо равенство

$$\iint\limits_{\substack{0 \le t \le x \\ 0 \le \tau \le y}} f(t, \tau) dt \, d\tau = \frac{x}{T_x} \iint\limits_{\substack{0 \le t \le T_x \\ 0 \le \tau \le y}} f(t, \tau) dt \, d\tau + \frac{y}{T_y} \iint\limits_{\substack{0 \le t \le x \\ 0 \le \tau \le T_y}} f(t, \tau) dt \, d\tau -$$

$$- \frac{xy}{T_x T_y} \iint\limits_{\substack{0 \le t \le T_x \\ 0 \le \tau \le T_y}} f(t, \tau) dt \, d\tau + \varepsilon(x, y), \qquad (4)$$

где $\varepsilon : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ является периодической функцией с множеством периодов $\mathrm{P}_\varepsilon \supseteq \Lambda(\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y)$.

Заметим, что если $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ непрерывна по переменным x и y, то

$\varepsilon : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ имеет непрерывную по этим переменным смешанную производную, и справедливо уравнение

$$\varepsilon_{xy} = f(x, y) - \frac{1}{T_x}\int_0^{T_x} f(t, y)dt - \frac{1}{T_y}\int_0^{T_y} f(x, \tau)d\tau + \frac{1}{T_x T_y}\iint\limits_{\substack{0\le t\le T_x \\ 0\le \tau\le T_y}} f(x, y)dxdy ,$$

с условиями

$$\varepsilon(0, y) = \varepsilon(x, 0) = 0 .$$

Однозначная разрешимость последней задачи гарантирует единственность указанного представления (4). Также, если функция $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ является тождественно постоянной или представима в виде $f(x, y) = f_1(x) + f_2(y)$, то получим уравнение $\varepsilon_{xy} = 0$, которое при условии $\varepsilon(0, y) = \varepsilon(x, 0) = 0$ имеет решение $\varepsilon(x, y) = 0$, тогда $\mathrm{P}_\varepsilon = \mathrm{R}^2$. В противном случае, функция $\varepsilon : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ наследует двумерную решётку периодов подынтегральной функции f.

Пример 2. Рассмотрим $f : \mathrm{R}^2 \to \mathrm{R}$ вида $(x, y) \to \sin x + \cos y$. Множеством периодов данной функции является решётка, порождённая векторами $\mathbf{T}_1 = \{2\pi; 0\}$ и $\mathbf{T}_2 = \{0; 2\pi\}$. Справедливо равенство

$$\iint\limits_{\substack{0\le t\le x \\ 0\le \tau\le y}} (\sin x + \cos\tau)dtd\tau = y\,(1 - \cos x) + x\sin y .$$

Усреднения по переменным x, y в отдельности и по обеим переменным имеют вид

$$S_x[f] = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\substack{0\le t\le 2\pi \\ 0\le \tau\le y}} (\sin t + \cos\tau)dtd\tau = \sin y ,$$

$$S_y[f] = \frac{1}{2\pi}\iint\limits_{\substack{0\le t\le x \\ 0\le \tau\le 2\pi}} (\sin t + \cos\tau)dtd\tau = 1 - \cos x ,$$

$$S_{xy}[f] = \frac{1}{4\pi^2}\iint\limits_{\substack{0\le t\le 2\pi \\ 0\le \tau\le 2\pi}} (\sin t + \cos\tau)dtd\tau = 0 ,$$

соответственно. Так как функция f представима в виде суммы функций, зависящих от каждой переменной в отдельности, то $\varepsilon(x, y) \equiv 0$.

Литература

1. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. Минск: «Наука и техника», 1979. 744 с.

2. Малютина М. В. Орлов С. С. Периодическое решение обобщённого интегрального уравнения Абеля первого рода // Известия высших учебных заведений. Поволжский регион. Физ.-мат. науки. 2017. № 4(44). С. 58–69. DOI: 10.21685/2072-3040-2017-4-5.

3. Соколова Г. К. О периодических функциях нескольких действительных переменных // ИТНОУ: Информационные технологии в науке, образование и управление. 2018. № 5(9). С. 60–65.

4. Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings, Lattices and Groups. New York: Springer-Verlag, 1999. 706 p.

5. Соколова Г. К. Периодические функции нескольких действительных переменных // Материалы 56-й Междунар. науч. студ. конф. МНСК – 2019. Новосибирск: ИПЦ НГУ, 2019. С. 20.

References

1. Erugin N. P. Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu differentsial'nykh uravneniy [A book for reading on the general course of ordinary differential equations]. Minsk: Science and Technology, 1979. 744 p.

2. Malyutina M. V., Orlov S. S. Periodicheskoe reshenie obobshonogo integralnogo uravneniya Abelya pervogo roda [Periodic solution of generalized Abel integral equation of the first kind] // Izvestiya vysshikh uchebnykh zavedeniy. Povolzhskiy region. Fiziko matematicheskie nauki — University proceedings. Volga region. Physical and mathematical sciences. 2017. No 4. Pp. 58–69. DOI: 10.21685/2072-3040-2017-4-5.

3. Sokolova G. K. O periodicheskikh funktsiyakh neskol'kikh deystvitel'nykh peremennykh [On periodic functions of several real variables] // ITNOU: Informatsionnye tekhnologii v nauke, obrazovanie i upravlenie. — ITSEM: Information technology in science, education and management. 2018. No 5(9). Pp. 60–65.

4. Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings, Lattices and Groups. New York: Springer-Verlag, 1999. 706 p.

5. Sokolova G. K. Periodicheskie funktsii neskol'kikh deystvitel'nykh peremennykh [Periodic functions of several real variables] // Materialy 56-y Mezhdunarodnaya nauchnaya studencheskaya konferentsiya MNSK – 2019 — Proceedings of the 56 international students scientific conference ISSC – 2019. Novosibirsk: IPC NSU, 2019. P. 20.

УДК 517.911+517.983.51

О ПРИМЕНЕНИИ СПЕЦИАЛЬНОЙ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ К ПОСТРОЕНИЮ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ АБСТРАКТНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ[1]

© Орлов Сергей Сергеевич
кандидат физико-математических наук, доцент,
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, Иркутск, б-р Гагарина, 20
E-mail: orlov_sergey@inbox.ru

© Шеметова Валентина Владимировна
магистрант
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, Иркутск, б-р Гагарина, 20
E-mail: valentina501@mail.ru

Данная заметка посвящена проблеме разрешимости начальной задачи для класса линейных дифференциально-операторных уравнений второго порядка. Исследование поставленной задачи проводится с помощью теории обобщенных функций (распределений) Соболева–Шварца со значениями в банаховых пространствах. Построено фундаментальное решение абстрактного дифференциального оператора, соответствующего рассматриваемому уравнению. Центральное место в работе занимает специальная оператор-функция, получаемая из классической формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа в некоммутативном гармоническом анализе. Эта оператор-функция содержит коммутаторы операторных коэффициентов уравнения, что позволило ослабить условие коммутативности их суперпозиции. В случае перестановочности операторных коэффициентов получен новый вид фундаментального решения в форме операторно-функционального ряда по гипергеометрической функции Куммера.
Ключевые слова: абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка, банахово пространство, коммутатор операторов, обобщенная функция, формула Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа, фундаментальное решение.

APPLICATION OF A SPECIAL OPERATOR VALUED FUNCTION TO THE CONSTRUCTION OF FUNDAMENTAL SOLUTIONS OF ABSTRACT DIFFERENTIAL OPERATORS

Sergey S. Orlov
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof,
Irkutsk State University
20 Gagarin Blvd., Irkutsk 664003, Russia

Valentina V. Shemetova
Student of magistracy,
Irkutsk State University
20 Gagarin Blvd., Irkutsk 664003, Russia

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 18-01-00643 А и № 18-51-54001 Вьет_а

This note is devoted to the problem of the solvability of the initial value problem for a class of the second order abstract linear differential equations. The Sobolev–Schwarz theory of distributions with values in Banach spaces is applied to the study of this problem. The fundamental solution of the considered differential operator is constructed in the form of a special operator valued function. This operator valued function is obtained by using the classical Baker–Campbell–Hausdorff formula from the field of noncommutative harmonic analysis and it contains commutators of the operator coefficients of the considered equation. In the general case, the commutability of the composition of operator coefficients is not assumed. In the commutative case, a new form of the fundamental solution is obtained as an operator valued functional series of the Kummer confluent hypergeometric function.
Keywords: second order abstract differential equation, Banach space, commutator of operators, distribution, Baker–Campbell–Hausdorff formula, fundamental solution.

Введение

Дифференциальные уравнения в абстрактных бесконечномерных и конечномерных пространствах представляют интерес для приложений. В частности, они позволяют с общих позиций изучать начально-краевые задачи различных разделов механики сплошных сред. Особо востребованными с этой точки зрения являются так называемые *полные* уравнения второго порядка [1], поскольку наличие в них слагаемого с первой производной по времени функции состояния процесса дает возможность учитывать такие эффекты, как диссипация энергии, воздействие гироскопических сил и другие. Для анализа этих уравнений используют различные подходы: теорию M, N-функций [2], спектральную теорию квадратичных операторных пучков [3] и полиномов [4], в том числе, с необратимым операторным коэффициентом при старшей производной по времени [4, 5], методы преобразования к неполным уравнениям второго порядка [6] и системам уравнений первого порядка [1, 3, 7, 8]. В представляемой работе применяется конструкция фундаментального решения [9], найден его вид, отличный от полученного ранее в [6].

1. Постановка задачи

Пусть E_1 и E_2 – вещественные банаховы пространства, $u = u(t)$ и $f = f(t)$ – неизвестная и заданная функции действительного аргумента со значениями в E_1 и E_2 соответственно. Введем в рассмотрение линейный дифференциальный оператор

$$D_2(u(t)) = Bu''(t) - A_1u'(t) - A_0u(t),$$

где B, A_1, A_0 – замкнутые линейные операторы, действующие из E_1 в E_2, такие, что $D(B) \subseteq D(A_1) \cap D(A_0)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение вида

$$D_2(u(t)) = f(t), \quad t > 0, \tag{1}$$

с начальными условиями

$$u'(0) = u_1, \; u(0) = u_0. \tag{2}$$

Под *классическим* решением начальной задачи (1), (2) будем понимать функцию $u = u(t)$ класса $C(t \geq 0; E_1) \cap C^2(t > 0; E_1)$, которая обращает в

тождество уравнение (1) и удовлетворяет начальным условиям (2).

Рассматриваемая задача представляет интерес с точки зрения приложений, поскольку к ней сводятся начально-краевые задачи механики сплошных сред. Например, таковой может быть начально-краевая задача

$$(\lambda-\Delta)u_{tt}(t,\bar{x})-\Delta u_t(t,\bar{x})+\Delta^2 u(t,\bar{x})=f(t,\bar{x}),\ t>0,\ \bar{x}\in\Omega\subset \mathrm{R}^N,$$

$$u(t,\bar{x})\big|_{t=0}=u_0(\bar{x}),\ u_t(t,\bar{x})\big|_{t=0}=u_1(\bar{x}),\ u(t,\bar{x})\big|_{\bar{x}\in\partial\Omega}=0,\ \Delta u(t,\bar{x})\big|_{\bar{x}\in\partial\Omega}=0,$$

которая при $N=2$ является диссипативной моделью поперечных колебаний термоупругой пластины [10], занимающей двумерную область Ω с границей $\partial\Omega$ класса C^∞. Краевой режим, заданный на $\partial\Omega$, называют *граничными условиями Навье* [11]. Другой пример доставляет начально-краевая задача

$$(\lambda'-\Delta)u_{tt}(t,\bar{x})-\alpha(\Delta-\lambda'')u_t(t,\bar{x})-\beta(\Delta-\lambda''')u(t,\bar{x})=f(t,\bar{x}),$$

$$u(t,\bar{x})\big|_{t=0}=u_0(\bar{x}),\ u_t(t,\bar{x})\big|_{t=0}=u_1(\bar{x}),\ u(t,\bar{x})\big|_{\bar{x}\in\partial\Omega}=0,$$

на цилиндре $[0;+\infty)\times\Omega$. Указанное уравнение в частных производных в современной литературе называют *уравнением Буссинеску–Лява* [12]. В одномерном случае $N=1$ оно описывает малые продольные колебания упругого стержня с учетом инерции.

Пусть $u=u(t)$ – классическое решение задачи (1), (2). Продолжим его нулем на интервал $(-\infty;0)$ следующим образом: $\tilde{u}(t)=u(t)\theta(t)$. Тогда в классе распределений с ограниченным слева носителем $K'_+(E_1)$ задача Коши (1), (2) имеет сверточное представление вида

$$D_2(\delta(t))*\tilde{u}(t)=\tilde{g}(t), \tag{3}$$

с правой частью $\tilde{g}(t)=f(t)\theta(t)+Bu_0\delta'(t)+(Bu_1-A_1u_0)\delta(t)$. Здесь и далее $\theta(t)$ – функция Хевисайда, $\delta(t)$ – функция Дирака. Единственным решением в $K'_+(E_1)$ (*обобщенным* решением начальной задачи (1), (2)), является распределение

$$\tilde{u}(t)=\varepsilon(t)*\tilde{g}(t), \tag{4}$$

где обобщенная оператор-функция $\varepsilon(t)$ удовлетворяет двум условиям

$$\forall v(t)\in K'_+(E_2)\quad D_2(\delta(t))*\varepsilon(t)*v(t)=v(t),$$

$$\forall w(t)\in K'_+(E_1)\quad \varepsilon(t)*D_2(\delta(t))*w(t)=w(t),$$

и называется *фундаментальной оператор-функцией* [9] или *фундаментальным решением* дифференциального оператора $D_2(\delta(t))$. В силу первого равенства распределение (4) является решением уравнения (3). Существование данного решения следует из существования свертки в выбранном классе распределений. Пусть далее существует $\tilde{v}(t)\in K'_+(E_1)$ такое, что $\tilde{v}(t)\neq\tilde{u}(t)$ и $D_2(\delta(t))*\tilde{v}(t)=\tilde{g}(t)$, тогда, с учетом второго равенства, получим

$$\tilde{v}(t)=\varepsilon(t)*D_2(\delta(t))*\tilde{v}(t)=\varepsilon(t)*\tilde{g}(t)=\tilde{u}(t),$$

т. е. противоречие, доказывающее единственность решения сверточного

уравнения (3) в классе $K'_+(E_1)$. Таким образом, смысл фундаментальной оператор функции состоит в следующем: если известен его вид, то начальная задача Коши (1), (2) имеет единственное обобщенное решение, для построения которого справедлива формула (4).

2. Основные теоремы

Пусть B и A – линейные непрерывные операторы, действующие в банаховом пространстве E. Рассмотрим оператор функцию

$$V(t) = e^{-At} B e^{At},$$

где e^{At} – операторная экспонента. По следствию из формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа [13] оператор-функция $V(t)$ представима рядом

$$V(t) = B + \big[B, A\big]\frac{t}{1!} + \big[\big[B, A\big], A\big]\frac{t^2}{2!} + \big[\big[\big[B, A\big], A\big], A\big]\frac{t^3}{3!} + \ldots$$

здесь и далее $\big[B, A\big] = BA - AB$ – коммутатор операторов B и A. Заметим, что $V(0) = B$, а операторы $V(t)$ и A образуют пару Лакса [14], т. е. удовлетворяют уравнению

$$V'(t) = \big[V(t), A\big].$$

Введем рассмотрение последовательность оператор-функций $U_{k-1}(t)$, где $k \in \mathrm{N}$, заданную рекуррентно

$$U_k(t) = \int_0^t V(s) U_{k-1}(s) ds,\ U_0(t) = \mathrm{I}, \tag{5}$$

где I – тождественный (единичный) оператор в банаховом пространстве E. Справедливы дифференциальные соотношения

$$U'_k(t) - [U_k(t), A] = U_{k-1}(t) B,$$

асимптотические формулы

$$U_{k-1}(t) \sim B^{k-1} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}, \quad t \to 0,$$

и оценки

$$\big\|U_{k-1}(s)\big\|_{L(E)} \le \frac{\|B\|^k T^{k-1} e^{(2k-1)\|A\|T}}{(k-1)!}, \quad t \in [0, T].$$

Теорема. Пусть линейный оператор B непрерывно обратим, тогда фундаментальное решение дифференциального оператора $D_2(\delta(t))$ имеет следующий вид:

$$\varepsilon(t) = B^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{A_1 B^{-1} s} U_{k-1}(s)\, ds\, \theta(t),$$

где оператор-функции $U_{k-1}(t)$ заданы формулой (5), в которой $U_0(t) = \mathrm{I}_2$, $V(t) = e^{-A_1 B^{-1} t} A_0 B^{-1} e^{A_1 B^{-1} t}$, I_1 и I_2 – тождественные операторы в E_1 и E_2 соответственно.

Доказательство теоремы сводится к непосредственной проверке определения фундаментального решения. Из $D(B) \subseteq D(A_1) \cap D(A_0)$ по теоре-

ме о замкнутом графике следует, что линейные операторы A_0B^{-1} и A_1B^{-1} являются ограниченными. Тогда операторно-функциональный ряд, указанный в данной теореме, сходится равномерно на любом компакте $[0;T]$ в норме банаховой алгебры $L(E_2)$ в силу неравенств

$$\left\| \int_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{(k-1)!} e^{A_1B^{-1}s} U_{k-1}(s)ds \right\|_{L(E_2)} \le \frac{a_0^k T^{2k-1} e^{(2k-1)a_1T}}{(k-1)!k!},\ k \in \mathrm{N},\ t \in [0;T],$$

где $a_0 = \left\| A_0B^{-1} \right\|_{L(E_2)}$ и $a_1 = \left\| A_1B^{-1} \right\|_{L(E_2)}$.

Следствие. Если операторы A_0B^{-1} и A_1B^{-1} имеют коммутативную суперпозицию, тогда фундаментальное решение дифференциального оператора $D_2(\delta(t))$ имеет следующий вид:

$$\varepsilon(t) = B^{-1} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^{2k-1}}{(2k-1)!} (A_0B^{-1})^{k-1} {}_1F_1(k;2k;A_1B^{-1}t)\theta(t),$$

где ${}_1F_1(a;b;t)$ – *вырожденная гипергеометрическая функция Куммера* [15] в интегральной форме

$${}_1F_1(a;b;t) = \frac{\Gamma(b)}{\Gamma(a)\Gamma(b-a)} \int_0^1 e^{t\tau} \tau^{a-1} (1-\tau)^{b-a-1} d\tau,$$

$\Gamma(a)$ – *гамма-функция Эйлера* положительного аргумента.

Заключение

Таким образом, с помощью специальной оператор-функции вида $V(t) = e^{-At} B e^{At}$ построено фундаментальное решение дифференциального оператора второго порядка в банаховых пространствах. Предлагаемый подход применим к объектам другой природы – дифференциально-операторным уравнениям с отклоняющимся аргументом [16], а также допускает обобщение на произвольный высокий порядок абстрактного линейного дифференциального оператора.

Литература

1. Fattorini H. O. Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces. Amsterdam: Elsevier Science Publishers, 1985. 314 p.

2. Иванов В. К., Мельникова И. В., Филинков А. И. Дифференциально-операторные уравнения и некорректные задачи. М: Физматлит, 1995. 176 с.

3. Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. М: Наука, 1989. 416 с.

4. Булатов. М. В., Рахвалов Н. П., Та Зуй Фыонг О методе матричной прогонки для одного класса дифференциально-алгебраических уравнений второго порядка // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2011. Т. 4. С. 2–11.

5. Замышляева А. А. Фазовые пространства одного класса линейных уравнений соболевского типа второго порядка // Вычислительные технологии. 2003. Т. 8. № 4. С. 45–54.

6. Гражданцева Е. Ю. Фундаментальные оператор-функции вырожденных

дифференциальных операторов высокого порядка в банаховых пространствах. Иркутск: Изд-во ИГУ, 2013. 91 с.

7. Федоров В. Е. Один класс уравнений соболевского типа второго порядка и вырожденные группы операторов // Вестник Челябинского государственного университета. 2011. № 26 (241). С. 59–75.

8. Baskalov A. G., Katsaran T. K., Smagina T. I Second-order linear differential equations in a Banach space and splitting operators // Russian Math. 2017. Vol. 61, № 10. P. 32–43. DOI: 10.3103/S1066369X1710005X.

9. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002. 548 p.

10. Bisognin E., Bisognin V., Perla Menzala G., Zuazua E. On exponential stability for von Karman equations in the presence of thermal effects // Math. Meth. Appl. Sci. 1998. Vol. 21. P. 393–416. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1476(19980325)21:5<393::AID-MMA958>3.0.CO;2-J.

11. Musina R., Nazarov A. I. On fractional Laplacians // Commun. Part. Diff. Eq. 2014. Vol. 39, № 9. P. 1780–1790. DOI: 10.1080/03605302.2013.864304.

12. Zamyshlyaeva A. A., Bychkov E. V., Tsyplenkova O. N. Mathematical models based on Boussinesq–Love equation // Appl. Math. Sci. 2014. Vol. 8, № 110. P. 5477–5483. DOI: 10.12988/ams.2014.47546.

13. Hall B. C. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction. New York: Springer, 2015. 453 p.

14. Абловиц Д., Сигур Х. Солитоны и метод обратной задачи рассеяния. М: Мир, 1987. 479 p.

15. Прудников А. П., Брычков Ю. А., Маричев О. И. Интегралы и ряды. В 3-х томах. Том 3. Специальные функции. Дополнительные главы. М: Физматлит, 2003. 688 с.

16. Шеметова В. В. Применение теории распределений к дифференциально-операторным уравнениям с запаздыванием // ИТНОУ: Информационные технологии в науке, образовании и управлении. 2018. № 5 (9). С. 70–76.

References

1. Fattorini H. O. Second Order Linear Differential Equations in Banach Spaces. Amsterdam: Elsevier Science Publ., 1985. 314 p.

2. Ivanov V. K., Melnikova I. V., Filinkov A. I. Differencial'no-operatornye uravneniya i nekorrektnye zadachi [Differential-operator equations and ill-posed problems]. M: Fizmatlit Publ., 1995. 176 p.

3. Kopachevsky N. D., Kerin S. G., Ngo Zuy Kan Operatornye metody v linejnoj gidrodinamike: evolyucionnye i spektral'nye zadachi [Operator methods in linear hydrodynamics: evolutionary and spectral problems]. M: Nauka Publ., 1989. 416 p.

4. Bulatov M. V., Rakhvalov N. P., Ta Duy Phuong O metode matrichnoj progonki dlya odnogo klassa differencial'no-algebraicheskih uravnenij vtorogo poryadka [On the matrix sweep method for a class of second-order differential-algebraic equations] // Izvestiya Irkutskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya «Matematika» — Bulletin of Irkutsk State University. Series «Mathematics». 2011. Vol. 4. Pp. 2–11.

5. Zamyshlyaeva A. A. [Phase spaces of a class of linear equations of Sobolev type of second order] // Vychislitel'nye tekhnologii — Computational technologies. 2003. Vol. 8. No. 4. Pp. 45–54.

6. Grazhdantseva E. Yu. Fundamental'nye operator-funkcii vyrozhdennyh differencial'nyh operatorov vysokogo poryadka v banahovyh prostranstvah [Fundamental operator-functions of degenerate high order differential operators in Banach spaces].

Irkutsk: Publishing House of ISU, 2013. 91 p.

7. Fedorov V. E. Odin klass uravnenij sobolevskogo tipa vtorogo poryadka i vyrozhdennye gruppy operatorov [One class of second order Sobolev type equations and degenerate groups of operators] // Vestnik Chelyabinskogo gosudarstvennogo universiteta — Bulletin of Chelyabinsk State University. 2011. No. 26. Pp. 59–75.

8. Baskalov A. G., Katsaran T. K., Smagina T. I. Second-order linear differential equations in a Banach space and splitting operators // Russian Math. 2017. Vol. 61, No. 10. Pp. 32–43. DOI: 10.3103/S1066369X1710005X.

9. Sidorov N., Loginov B., Sinitsyn A., Falaleev M. Lyapunov–Schmidt Methods in Nonlinear Analysis and Applications. Dordrecht: Kluwer Academic Publ., 2002. 548 p.

10. Bisognin E., Bisognin V., Perla Menzala G., Zuazua E. On Exponential Stability for von Karman Equations in the Presence of Thermal Effects // Math. Meth. Appl. Sci. 1998. Vol. 21. Pp. 393–416. DOI: 10.1002/(SICI)1099-1476(19980325)21:5<393::AID-MMA958>3.0.CO;2-J.

11. Nazarov A. I., Musina R. On fractional Laplacians // Communications in PDEs. 2014. Vol. 39, No. 9. Pp. 1780–1790. DOI: 10.1080/03605302.2013.864304.

12. Zamyshlyaeva A. A., Bychkov E. V., Tsyplenkova O. N. Mathematical models based on Boussinesq–Love equation // Appl. Math. Sci. 2014. Vol. 8, No. 110. Pp. 5477–5483. DOI: 10.12988/ams.2014.47546.

13. Hall B. C. Lie Groups, Lie Algebras, and Representations: An Elementary Introduction. New York: Springer, 2015. 453 p.

14. Ablowitz D., Sigur H. Solitony i metod obratnoj zadachi rasseyaniya [Solitons and the inverse scattering method]. M: Mir Publ., 1987. 479 p.

15. Prudnikov A. P., Brychkov Yu. A., Marichev O. I. Integraly i ryady. V 3-h tomah. Tom 3. Special'nye funkcii. Dopolnitel'nye glavy [Integrals and Series. In 3 volumes. Volume 3. Special functions. Additional chapters]. M: Fizmatlit Publ., 2003. 688 p.

16. Shemetova V. V. Primenenie teorii raspredelenij k differencial'no-operatornym uravneniyam s zapazdyvaniem [Application of the theory of distributions to differential operator equations with finite delay] // ITNOU: Informacionnye tekhnologii v nauke, obrazovanii i upravlenii — ITSEM: Information technology in science, education and management. 2018. No. 5. Pp. 70–76.

УДК 517.926

ОБ ОДНОЙ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

© Севээн Ай-Кыс Эрес-ооловна
студент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: aikys.seveen@mail.ru

© Телешева Любовь Александровна
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: love_20_09@mail.ru

Данная работа посвящена исследованию разрешимости одной линейной обратной задачи для линейного дифференциального уравнения третьего порядка с граничным условием переопределения. Показано существование и единственность решения поставленной обратной задачи в пространстве Соболева. Доказательство теоремы существования и единственности решения осуществляется с помощью перехода от исходной обратной задачи к новой краевой задаче для интегро-дифференциального уравнения. Для доказательства существования решения полученной новой краевой задачи применяются методы функционального анализа, такие как метод продолжения по параметру и априорные оценки. С помощью априорных оценок доказывается единственность решений.
Ключевые слова: обратная задача, разрешимость, уравнения третьего порядка, граничное условие переопределения, априорные оценки, метод продолжения по параметру.

ON AN INVERSE PROBLEM FOR A LINEAR DIFFERENTIAL EQUATION OF THE THIRD ORDER

Ay-Kys E. Seveen
Student
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

Lyubov A. Telesheva
Cand. Sci (Phys. and Math.), Senior lecturer
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

This paper is devoted to the investigation of the solvability of a single linear inverse problem for a linear third-order ordinary differential equation with a redistribution boundary condition. The existence and uniqueness of the solution of the inverse problem in the Sobolev space is shown. The proof of the existence and uniqueness theorem is carried out by passing from the initial inverse problem to a new boundary problem for an integro-differential equation. To prove the existence of a solution to the obtained new boundary value problem, functional analysis methods are used, such as the

parameter continuation method and a priori estimates. Using a priori estimates, we prove the uniqueness of the solutions.
Keywords: inverse problem, solvability, third-order equations, boundary redefinition condition, a priori estimates, method of continuation with respect to a parameter.

Введение

В рамках математической физики активно развивается теория обратных задач для дифференциальных уравнений.

Как правило, обратные задачи характеризуются тем, что в них помимо краевых условий, естественных для того или иного класса обратных задач для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, задаются некоторые условия переопределения, вид и количество которых определяется видом неизвестных коэффициентов или неизвестной правой части.

Ежемесячно издаются специальные журналы по теории обратных задач, и перечислить всю библиографию работ по теории обратных задач невозможно, как работы, близкие по постановке задач, по используемой технике, отметим монографии [1-3].

Вопросы об исследовании разрешимости обратных задач для линейных дифференциальных уравнений изучались в следующих работах: Т. П. Плеханова [4], А. О. Мамытов [5] и т. д.

1 Постановка задачи

Пусть Ω есть интервал (0,1). Функции *f(x), g(x)* и $\mu(x)$ – заданы при $x \in [0,1]$.

Обратная задача. Найти функцию *u(x)* и число *a*, связанные в Ω уравнением

$$u'''(x) + \mu(x)u(x) = f(x) + ag(x), \tag{1}$$

при выполнении для функции *u(x)* условий:

$$u(0) = 0, \tag{2}$$

$$u(1) = 0, \tag{3}$$

$$u'(0) = u'(1) = 0, \tag{4}$$

где (2) – условие переопределения, (3) и (4) – условии краевой задачи.

2 Разрешимость обратной задачи

Для удобства и простоты записи выкладок и формулировки введём следующие обозначения:

$$f_1(x) = \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)', \qquad f_2(x) = g(x)\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)', \qquad \alpha(x) = -\frac{g'(x)}{g(x)},$$

$$\beta(x) = \mu'(x) - \frac{g'(x)}{g(x)}\mu(x), \qquad R_1 = \frac{1}{2\delta_0^2}\int_0^1 f_2^2(x)dx,$$

$$R_2 = \frac{\delta_1^2}{2} + \frac{1}{2\delta_1^2}\int_0^1 f_2^2(x)dx + \frac{\delta_2^2}{2} + \frac{1}{2\delta_2^2}\max_{x\in[0,1]}\alpha^2(x)\int_0^1 u'''^2(x)dx +$$

$$+\frac{\delta_3^2}{2}+\frac{1}{2\delta_3^2}\max_{x\in[0,1]}\mu^2(x)\int_0^1 u'^2(x)dx+\frac{\delta_4^2}{2}+\frac{1}{2\delta_4^2}\max_{x\in[0,1]}\beta^2(x)\int_0^1 u^2(x)dx\ ,$$

где $\delta_0,\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4$ – положительные числа.

Теорема 1. *Пусть выполняются включения:*

$$g(x)\in C^4\left([0,1]\right),\ g(x)\in L_2\left([0,1]\right),\ f(x)\in C^1\left([0,1]\right),\ f(x)\in L_2\left([0,1]\right),$$

$$\alpha(x)\in C^4([0,1]),\ \beta(x)\in C^1([0,1]),\ f_2(x)\in L_2([0,1]),\ \mu(x)\in C^2\left([0,1]\right).$$

Кроме того, выполняются условия:

$$\left(-\frac{\alpha'''(x)}{2}-\frac{\mu'(x)}{2}+\beta(x)-\frac{\delta_0^2}{2}\right)\geq\mu_0>0, \tag{5}$$

где μ_0 – положительное число.

$$\alpha'(x)\geq 0,\quad \beta(x)\geq 0, \tag{6}$$

$$g(x)\neq 0,\ \text{при}\ x\in(0,1). \tag{7}$$

Тогда обратная задача разрешима в пространстве $W_2^4\left([0,1]\right)$.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную краевую задачу: найти функцию *u(x),* связанную в Ω, для которой выполняются условия (3) и (4), и которая удовлетворяет уравнению:

$$u^{(IV)}(x)+\alpha(x)u'''(x)+\mu(x)u'(x)+\beta(x)u(x)=f_2(x). \tag{8}$$

Для доказательства разрешимости краевой задачи воспользуемся методом априорных оценок.

Для получения первой априорной оценки умножим уравнение (8) на *u(x)* и проинтегрируем от *0* до *1*

$$\int_0^1 u^{(IV)}(x)u(x)dx+\int_0^1\alpha(x)u'''(x)u(x)dx+\int_0^1\mu(x)u'(x)u(x)dx+$$

$$+\int_0^1\beta(x)u^2(x)dx=\int_0^1 f_2(x)u(x)dx.$$

Интегрируя по частям, используя условия (3) и (4), применяя неравенство Юнга и с учётом условии теоремы (5) – (7) получаем оценки:

$$\int_0^1 u''^2(x)dx\leq R_1\ , \tag{9}$$

$$\int_0^1 u^2(x)dx\leq\frac{R_1}{\mu_0}. \tag{10}$$

Рассмотрим следующее тождество, являющееся следствием уравнения (8).

$$\int_0^1 u^{(IV)^2}(x)dx+\int_0^1\alpha(x)u'''(x)u^{(IV)}(x)dx+\int_0^1\mu(x)u'(x)u^{(IV)}(x)dx+$$

$$+\int_0^1\beta(x)u(x)u^{(IV)}(x)dx=\int_0^1 f_2(x)u^{(IV)}(x)dx.$$

Используя неравенство Юнга и Пуанкаре получаем оценку

$$\int_0^1 u^{(IV)^2}(x)dx \le R_2, \qquad (11)$$

Неравенства (9) – (11) дают требуемую оценку $\|u\|_{W_2^4([0,1])} \le R$,

где $R = C \cdot \| f(x) \|$ - зависит только от исходных данных и от функции *f(x)*.

Полученная оценка даёт разрешимость краевой задачи в пространстве $W_2^4\left(\left[0,1\right]\right)$. Очевидно, что $a = \dfrac{u'''(0) - f(0)}{g(0)}$, *u(x)* – решение вспомогательной краевой задачи (8), являются решением обратной задачи.

Единственность решения доказывается от противного.

Теорема доказана.

Заключение

В данной работе были получены условия существования и единственности обратной задачи (1) – (4). Аналогичным методом можно исследовать на разрешимость обратную задачу

$u'''(x) + a(x)u''(x) + b(x)u'(x) + c(x)u = f(x) + ag(x),$ с условиями (2) – (4).

Наличие слагаемых, содержащих $u''(x), u'(x)$ не влияет на общий результат, появятся только дополнительные условия на функции $a(x),\ b(x),\ c(x)$.

Литература

1. Кабанихин С. И. Обратные и некорректные задачи. Новосибирск: Сибирское научное издательство, 2009. 457 с.
2. Белов Ю. Я. Обратные задачи для уравнения в частных производных. Утрехт: ВСП, 2002. 118 с.
3. Кожанов А. И. Уравнения составного типа и обратные задачи. Утрехт: ВСП, 1999.
4. Плеханова Т. П. О задаче с интегральными условиями для одного ОДУ третьего порядка // Улан-Удэ: Актуальные вопросы вещ. и функц. анализа, 2015. С. 76-80.
5. Мамытов О. А. Об одной задаче определения правой части линейного ДУ четвёртого порядка // Молодой учёный, 2016. С. 49-53.

References

1. Kabanikhin S. I. Inverse and ill-posed problems. Novosibirsk: Siberian scientific publishing house, 2009. 457 p.
2. Belov Yu. Ya. Inverse problems for partial differential equation. Utrecht: VSP, 2002. 118 p.
3. Kozhanov A. I. Composite type equation and inverse problems. Utrecht: VSP, 1999.
4. Plekhanova T. P. On the problem with integral conditions for one ordinary differential equation of the third order // Ulan-Ude: Actual problems of real and functional analysis, 2015. Pp. 76-80.
5. Mamytov O. A. On a problem of determining the right part of a linear differential equation of the fourth order // Young scientist, 2016. Pp. 49-53.

УДК 519.624.2+532.5

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ ОСОБЕННОСТИ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЙ ПОЛИМЕРНОЙ ЖИДКОСТИ[1]

© Семисалов Борис Владимирович
кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник
Институт вычислительных технологий СО РАН
Россия, 630090, Новосибирск, пр-т академика Лаврентьева, 6
E-mail: ViBiS@ngs.ru

© Круглова Екатерина Алексеевна
студентка магистратуры
Новосибирский государственный университет
Россия, 630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 1
E-mail: krugloverus@gmail.com

© Блохин Александр Михайлович
доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН
Россия, 630090, Новосибирск, пр-т академика Коптюга, 4
E-mail: blokhin@math.nsc.ru

В данной работе проведен численный анализ реологической модели Покровского-Виноградова, описывающей течения несжимаемой вязкоупругой полимерной жидкости. Конкретно, рассмотрен случай течения жидкости между двумя соосными цилиндрами. Поставлена краевая задача для нелинейного ОДУ второго порядка, описывающая распределение скорости в таком канале и учитывающая его осевую симметрию. Численное решение найдено с помощью нелокального алгоритма без насыщения. Найдены решения для предельно малых значений радиуса внутреннего цилиндра. Локализована координата особенности решения. Алгоритм локализации был верифицирован на примере краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в случае установившегося течения. Проанализирована зависимость вещественной координаты точки особенности от параметров задачи. Результаты настоящей работы могут быть применены в сфере аддитивных технологий (3D печати).

Ключевые слова: аддитивные технологии, 3D печать, полимерная жидкость, реологическая модель Покровского–Виноградова, полиномы Чебышева, приближения без насыщения, приближения Чебышева–Паде, локализация особенности, течение Пуазейля, спектральные методы.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке российского научного фонда (проект № 17-71-10135)

NUMERICAL ANALYSIS OF THE SINGULARITIES OF AXISYMMETRIC STATIONARY FLOWS OF A POLYMER LIQUID

Semisalov V. Boris
PhD. Sci. (Phys. and Math.), Chief Researcher
Institute of Computational Technologies SB RAS
6 Academic Lavrentiev Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
ViBiS@ngs.ru

Kruglova A. Ekaterina
Master student (Mathematics),
Novosibirsk State University
1 Pirogova Street, 630090 Novosibirsk, Russia
krugloverus@gmail.com

Blokhin M. Alexander
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Head of laboratory,
Sobolev's Institute of Mathematics SB RAS
4 Acad. Koptyug Avenue, 630090 Novosibirsk, Russia
blokhin@math.nsc.ru

In this paper, a numerical analysis of Pokrovsky-Vinogradov rheological model describing the flow of an incompressible viscoelastic polymer fluid is carried out. Specifically, the case of the fluid flow between two coaxial cylinders is considered. A boundary-value problem for a second-order nonlinear ODE is set, which describes the velocity distribution in such a channel and takes into account its axial symmetry. The numerical solution is found using a non-local algorithm without saturation. Solutions are found for extremely small radii of the inner cylinder. The coordinate of the solution singularity is localized. The localization algorithm was verified using the example of a boundary value problem for the Navier – Stokes equations in the case of a steady flow. The dependence of the real coordinate of a singularity point on the parameters of the problem is analyzed. The results of this work can be applied in the field of additive technologies (3D printing).
Keywords: additive technologies, 3D printing, polymer liquid, Pokrovsky – Vinogradov rheological model, Chebyshev polynomials, approximation without saturation, Chebyshev – Padé approximation, localization of the singularity, Poiseuille flow, spectral methods.

Введение

В настоящее время аддитивные технологии (3D-печать) с использованием полимерных материалов являются одной из самых востребованных и быстрорастущих отраслей. Данная работа является естественным продолжением работы [2]. Перед авторами стояла задача локализовать координату особенности, чтобы в дальнейшем модифицировать численный алгоритм [3], сделав его экономичнее.

1 Предварительные сведения

В работе [2] решена задача о неизотермическом течении вязкоупругой полимерной жидкости между двумя соосными цилиндрами. Два соосных цилиндра радиусов r_0 и 1 ($r_0<r<1$) моделируют канал в 3D принтере с тонким нагревательным элементом радиуса r_0. Требуется найти скорость

установившегося течения в канале u (здесь $u = \hat{u}(y,z)$ – компонента вектора скорости вдоль оси Ox, все остальные компоненты равны нулю). Модификация мезоскопической реологической модели Покровского–Виноградова из [1] используется для описания полимерной жидкости. Мы рассматриваем течения качественно близкие к течениям Пуазейля. Для таких случаев уравнение для скорости в полярных координатах (ρ,φ) с учетом осевой симметрии принимает вид

$$r\gamma u'' + \Gamma u' = -r\hat{G}K. \tag{1}$$

В (1) штрихом обозначены производные по r, а также

$$\begin{gathered}
\gamma = \frac{(1-\eta^2 t^2)(1+t^2)}{Q},\ \Gamma = 1 + \overline{\theta}\,\frac{Y - \gamma(\overline{E}_A + Y)}{\ln r_0 Y^2},\ \hat{G} = \hat{D} + \Im\frac{Y-1}{\overline{\theta}}, \\
K = \frac{\tilde{K}}{J},\ \tilde{K} = \frac{\Lambda(1+\eta^2 t^2)}{2t},\ \eta^2 = \frac{1+\rho}{1-\rho},\ \rho = 2\beta - 1,\ t = \frac{1}{\tilde{g} + \sqrt{\tilde{g}^2 - 1}}, \\
\tilde{g} = \frac{1+\sqrt{1+4\Lambda^2}}{2\Lambda},\ \Lambda = \sqrt{1-\rho^2}W\overline{\tau}_0\lambda,\ \lambda^2 = (u')^2,\ (\lambda = |u'|), \\
Q = 1 - \eta^2 t^4 - \frac{6\rho t^2}{1-\rho} + \frac{4\Lambda t(1-t^2)}{1-\rho},\ \Im = \frac{\mathrm{Ra}\,\mathrm{Re}}{\mathrm{Pr}},
\end{gathered} \tag{2}$$

где $\overline{\theta}$ – относительная разность температур между внутренним и внешним цилиндрами ($\overline{\theta} > 0$ – нагрев изнутри, $\overline{\theta} < 0$ – нагрев снаружи) постоянна. Здесь Y – распределение тепла, $\overline{E}_A$ – энергия активации, W – число Вайсенберга, Ra – число Рэлея, Re – число Рейнольдса, Pr – число Прандтля, $\hat{D}$ – характеристика градиента давления и вязкости жидкости ($\hat{D} = \mathrm{Re}\,\hat{A}$), где $\hat{A}$ – перепад давления вдоль оси Ox; β – феноменологический параметр реологической модели (см. [1]), учитывающий ориентацию макромолекулярного клубка; $\overline{\tau}_0$ – время релаксации.

Перепишем уравнение (1), добавив к нему граничные условия (условия прилипания)

$$u'' = -\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\Gamma}{r}u' + \hat{G}K\right) = f(r,u_r),\ u|_{r=r_0,1} = 0. \tag{3}$$

В случае, когда радиус нагревательного элемента r_0 мал, краевая задача (3) имеет особенность в окрестности левой границы $r=r_0$ (около стенки внутреннего цилиндра). Эта особенность существенно влияет на решение и представляет собой фундаментальную трудность для большинства классических методов численного решения таких задач. Вследствие нелинейности нашей задачи положение и тип особой точки искомого решения оказываются не фиксированными. Локализации этой особенности посвящен раздел 2.

Для решения задачи (3) используется нелокальный алгоритм без насыщения (см. [4]), подробно описанный в работах [2], [3]. Благодаря отсутствию насыщения авторам удалось получить решения для достаточно малых значений радиуса внутреннего цилиндра r_0 (r_0=0.0002).

2 Локализация особенности

Обозначим погрешность численного решения за ε. Она складывается из погрешности метода приближения ε_M и вычислительной погрешности ε_R, возникающей из-за округления действительных чисел в памяти ЭВМ. Т. о. $\varepsilon = \varepsilon_M + \varepsilon_R$. В работе [2] подробно описан процесс построения оценок этих двух компонент погрешности, так же дан их анализ.

На графике 1 продемонстрированы значения погрешности метода ε_M для трех разных радиусов нагревательного элемента r_0. Скорость убывания компоненты ε_M свидетельствует о том, что сходимость в данном случае носит экспоненциальный характер. Легко заметить, что с уменьшением значения r_0 графики 1 становятся более пологими, а углы от оси x до графика уменьшаются. Имеют места неравенства $\alpha > \beta > \gamma$.

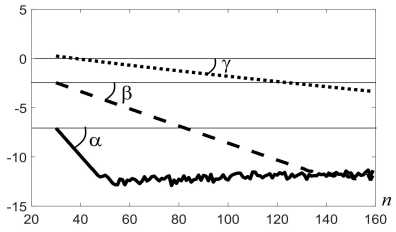


Рис. 1. Логарифмы погрешности метода ε_M для различных значений радиуса внутреннего элемента r_0. Сплошной линией – r_0=0.1, длинным пунктиром – r_0=0.01, мелким пунктиром – r_0=0.001.

Область сходимости использованных приближений при наличии у решения особенностей в комплексной плоскости – эллипс Бернштейна. Известно, что размер эллипса Бернштейна характеризуется углами наклона α, β, γ на рис. 1($\left|\mathrm{tg}\,\alpha\right| = \log_{10} 1/\rho$, где ρ – сумма полуосей эллипса Бернштейна). Тогда на основании теоремы о сходимости (см. [5]) можно сказать, что с уменьшением угла наклона графика, особенность решения приближается к левой границе отрезка $\left[r_0, 1\right]$.

Предполагаем, что особенность находится в комплексной плоскости $\mathbb{C}$, тогда ее координата имеет вид $\delta + i\varepsilon$. Будем приближённо считать, что особенность является полюсом неизвестной функции.

Выбранная нами техника аппроксимации особенности основана на нахождении полюсов аппроксиманта Чебышева–Паде. Подробно она описана в [6]. Алгоритм локализации был верифицирован авторами на примере краевой задачи для уравнений Навье–Стокса в случае установившегося течения. Особенность такой задачи была найдена с точностью до 14-ти значащих цифр.

3. Численные результаты

На рис. 2 приведены результаты расчетов координаты особенности решения краевой задачи (3) в зависимости от радиуса внутреннего цилиндра r_0; энергии активации $\overline{E}_A$; числа Вайсенберга W. Для всех графиков число узлов бралось равным n=51. В ходе работы проверено, что с увеличением n координата особенности изменяется не значительно.

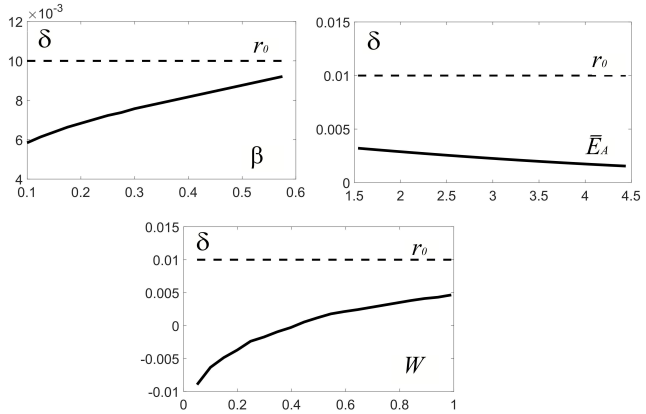


Рис. 2. Зависимость координаты особенности от физических параметров задачи

Заключение

С помощью приближений Чебышева–Паде было установлено, что особенность решения находится на вещественной оси вблизи левой границы расчетного отрезка.

Литература

1. Алтухов Ю. А., Гусев А. С., Пышнограй Г.В. Введение в мезоскопическую теорию текучести полимерных систем. Барнаул: АлтГПА, 2012.
2. Блохин А. М., Круглова Е. А., Семисалов Б. В. Оценка двух компонент погрешности численного решения задачи о неизотермическом течении полимерных растворов между двумя соосными цилиндрами // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2018. Т. 58, № 7.
3. Семисалов Б.В. Нелокальный алгоритм поиска решений уравнения Пуассона и его приожения // Журн. выч. мат. и мат. физ. 2014. Т. 54, № 7. С. 1110–1135.
4. Бабенко К.И. Основы численного анализа. М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат. лит., 1986.
5. Trefethen, L. N. Approximation Theory and Approximation Practice. 2013. SIAM.
6. T. W. Tee, Lloyd N. Trefethen. A Rational Spectral Collocation Method with Adaptively Transformed Chebyshev Grid Points // SIAM J. Sci. Comput., 28(5), P. 1798–1811.

References

1. Altuhov J. A., Gusev A. C., Pyshogray G.V. Vvedenie v mesoscopicheskuyu teoriyu tekuchesti polimernih sistem [Introduction to mesoscopic theory of fluidity of polymer systems]. Barnaul: AltSPU, 2012.

2. Blokhin A. M., Kruglova E. A., Semisalov B. V. Ocenka dvuh komponent pogreshnosty chislennogo resheniya zadachi o neisotermicheskom techenii polimernih rastvorov mejdu dvumya soosnimi cilindrami [Estimation of two error components in the numerical solution to the problem of nonisothermal flow of polymer fluid between two coaxial cylinders] // J. comp. math. and math. phys. 2018. T. 58, № 7.

3. Semisalov B.V. Nelocalniy algoritm poiska resheniy uravneniya Puassona i ego prilojeniya [A Nonlocal Algorithm for Solving the Poisson Equation and Its Applications]]. // J. comp. math. and math. phys. 2014. T. 54, № 7. P. 1110–1135.

4. Babenko K.I. Osnovi chislennogo analiza [Basics of numerical analysis]. M.: Science. Ed. phys. math. lit., 1986.

5. Trefethen, L. N. Approximation Theory and Approximation Practice. 2013. SIAM.

6. T. W. Tee, Lloyd N. Trefethen. A Rational Spectral Collocation Method with Adaptively Transformed Chebyshev Grid Points // SIAM J. Sci. Comput., 28(5), P. 1798–1811.

УДК 517.17+517.51

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К УРАВНЕНИЯМ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

© Соколова Галина Константиновна
студент
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, Иркутск, б-р Гагарина, 20
E-mail: 98gal@mail.ru

Математическое описание самоподобных объектов и их свойств, а также различных процессов и явлений, повторяющихся в пространстве и времени, приводит к понятию периодической функции нескольких действительных переменных. Сами математические модели имеют вид начально-краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных. В докладе предполагается изложить доказанные автором теоремы о периодических функциях нескольких действительных переменных, которые можно применять для построения периодических решений некоторых классов дифференциальных уравнений в частных производных. Без ограничения общности, рассматриваются периодические функции, имеющие в качестве множества периодов прямоугольную решётку. Формулируются теоремы интегрального исчисления таких функций. В частности, обобщена лемма о представлении интеграла периодической функции одной переменной в виде суммы линейной и периодической функций. Последнее утверждение приведено в известной монографии Н. П. Еругина и играет большую роль в исследовании проблемы существования периодических решений обыкновенных дифференциальных уравнений.

Ключевые слова: периодическая функция нескольких действительных переменных, основной период в данном направлении, m-мерная решётка периодов.

УДК 517.977

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ОПТИМИЗАЦИИ КВАДРАТИЧНЫХ ПО СОСТОЯНИЮ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ С ТЕРМИНАЛЬНЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ[1]

© Трунин Дмитрий Олегович
кандидат физико-математических наук, старший преподаватель,
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: tdobsu@yandex.ru

Предложен подход к нелокальному улучшению управлений в классе квадратичных по состоянию и линейных по управлению задач оптимального управления с частично закрепленным правым концом на основе решения системы функциональных уравнений, которая определяет условия нелокального улучшения управления. Для решения рассматриваемой системы применяется итерационный процесс, на каждой итерации которого решается скалярное уравнение. Процедура обеспечивает улучшение допустимого управления без процедуры варьирования с сохранением всех терминальных ограничений и используется для итерационного метода решения задачи с ограничениями.
Ключевые слова: задача оптимального управления; терминальные ограничения; условия улучшения управления; итерационный процесс.

ON A CERTAIN APPROACH TO OPTIMIZATION QUADRIC-IN-STATE CONTROLLED SYSTEMS WITH TERMINAL CONSTRAINTS

Dmitriy O. Trunin
Cand. Sci. (Phys. and Math.), Senior Lecturer,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia
E-mail: tdobsu@yandex.ru

An approach to nonlocal improvement of controls in the class of quadratic-in-state and linear on a control optimal control problems with a partially fixed right end based on the solution of a system of functional equations that determines the conditions for nonlocal control improvement is proposed. To solve the system under consideration we use an iterative process, and the scalar equation is solved at each iteration. The procedure ensures the improvement of permissible control without variation and with preservation of all terminal constraints and is used for solving a constrained problem using an iterative.
Keywords: optimal control problem; terminal constraints; conditions for improving control; iterative process.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, проект 18-41-030005-р_а; МОН РФ, проект 1.5049.2017/БЧ.

УДК 517.9

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ СО СПЕЦИАЛЬНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

© Убодоев Владимир Викторович
кандидат физико-математических наук, доцент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: ubodoev@mail.ru

© Коновалова София Ивановна
студент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: bhbyrf1998@gmail.com

© Фомина Ирина Владимировна
студент
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, г. Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: fomina711@yandex.ru

Статья посвящена исследованию систем квазилинейных дифференциальных уравнений, решениями которых являются вероятностные распределения. Сформулированы условия существования и единственности стационарного распределения и его асимптотической устойчивости.

Ключевые слова: вероятностные распределения, асимптотическая устойчивость решений дифференциальных уравнений, стационарное распределение.

QUASILINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH SPECIAL RIGHT PART

Vladimir V. Ubodoev
Cand. Sci (Phys. and Math.), A/Prof.,
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

Sofia I. Konovalova
student
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

Irina V. Fomina
student
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

The article is devoted to the research of the systems of quasilinear differential equations, which solutions are probability distributions. The conditions for the existence and uniqueness of the stationary distribution and its asymptotic stability are formulated.

Keywords: probability distributions, asymptotic stability of solutions of differential equations, stationary distribution.

Введение

Рассматриваются системы квазилинейных обыкновенных дифференциальных уравнений со специальной правой частью, в частности системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными и периодическими коэффициентами. Сформулированы условия существования и единственности стационарного распределения в системе с постоянными коэффициентами, стационарного периодического распределения для системы с периодическими коэффициентами и их асимптотической устойчивости.

1.Постановка задачи.

В работе [1] были указаны условия на правую часть нелинейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, при выполнении которых решениями системы являются вероятностные распределения. В этой статье мы рассматриваем квазилинейную систему дифференциальных уравнений.

Обозначим через K^n множество векторов $x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ действительного n–мерного векторного пространства R^n, координаты которых удовлетворяют условиям:

$$x_i \geq 0, (i=1,2,\ldots,n), \quad \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 .$$

Вектор $x \in K^n$ называется распределением вероятностей.

Рассмотрим систему квазилинейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t) + \mu f(t,x,\mu), \tag{1}$$

где $A(t)-$ квадратная матрица порядка n с элементами $a_{ij}(t), i,j=1,...,n$; $b(t), f(t,x,\mu)-$ вектор-функции, соответственно, с компонентами $b_i(t)$, $f_i(t,x,\mu), i=1,...,n$, и правая часть $A(t)x+b(t)+\mu f(t,x,\mu)$ удовлетворяет каким-либо условиям, обеспечивающим существование и единственность решений системы (1) в K^n. Требуется установить при каких условиях решение $x(t)=x(t,t_0,x_0)=\left(x_1(t),...,x_n(t)\right)$ системы (1) являются распределением вероятностей, т.е. $x(t,t_0,x_0)\in K^n \ \forall t \geq t_0$ при $x_0=\left(x_1^0,...,x_n^0\right)\in K^n$ или

$$x_i(t) \geq 0, (i=1,2,\ldots,n), \quad \sum_{i=1}^{n} x_i(t) = 1$$

Сформулировать условия, при которых в системе (1) имеется решение, являющееся стационарным распределением вероятностей, и все остальные решения $x(t) = x(t, t_0, x_0)$ при $x_0 \in K^n$ системы (1) стремятся к нему при $t \to +\infty$. Получить формулы для вычисления стационарного и периодического распределения.

2.Важные теоремы

Теорема 1. Если векторная функция $A(t)x + b(t) + \mu f(t, x, \mu)$ удовлетворяет каким-либо условиям, обеспечивающим существование и единственность решений системы (1) при $x \in K^n$, $t \geq 0$, $|\mu| < \mu_0$, то при выполнении условий

$$\begin{aligned} &а) \quad a_{ij}(t) + b_i(t) + \mu f_i(t, x, \mu) \geq 0, \quad i \neq j, \\ &б) \quad a_{ii}(t) + b_i(t) + \mu f_i(t, x, \mu) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &в) \quad \sum_{i=1}^{n} \left[a_{ij}(t) + b_i(t) + \mu f_i(t, x, \mu) \right] = 0, \quad j = 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{2}$$

каждому начальному условию $x_0 \in K^n$ в момент t_0 отвечает единственное решение системы (1) $x(t) = x(t, t_0, x_0)$, удовлетворяющее условию $x(t, t_0, x_0) \in K^n$ при $\forall t \geq t_0$.

Доказательство. В работе [2] показано, что если выполнены условия (2а), (2б) и начальные условия $x_0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)$ для системы (1) располагаются в множестве K^n, то и решение $x(t) = x(t, t_0, x_0) = \left(x_1(t, t_0, x_0), \ldots, x_n(t, t_0, x_0)\right)$ системы (1) при $t \geq t_0$, также будет располагаться в множестве K^n. С другой стороны из условии (2в) следует, что система (1) имеет частный интеграл $\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$. Таким образом, решение $x(t, t_0, x_0)$ системы является распределением вероятностей при $\forall t \geq t_0$, если $x_0 \in K^n$

Замечание 1. Если $\mu = 0$, то правая часть $A(t)x + b(t)$ линейна относительно компонент вектора x, то система (1) будет линейной системой:

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + b(t), \tag{3}$$

а условия (2) примут вид

$$\begin{aligned} &а) \quad a_{ij}(t) + b_i(t) \geq 0, \quad i \neq j, \\ &б) \quad a_{ii}(t) + b_i(t) \leq 0, \quad i = 1, \ldots, n, \\ &в) \quad \sum_{i=1}^{n} \left[a_{ij}(t) + b_i(t) \right] = 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{4}$$

Замечание 2. Пусть вектор $b(t)=0$, обозначим $Q(t)=A(t)$, тогда система (3) запишется в виде:

$$\frac{dx}{dt}=Q(t)x, \tag{5}$$

а условия (4) примут вид

$$\begin{aligned} &а)\quad q_{ij}(t)\geq 0, \quad i\neq j,\\ &б)\quad q_{ii}(t)\leq 0, \quad i=1,\ldots,n,\\ &в)\quad \sum_{i=1}^{n} q_{ij}(t)=0, \quad j=1,\ldots,n. \end{aligned} \tag{6}$$

где $q_{ij}(t)$ элементы матрицы $Q(t)$. Матрица $Q(t)$, удовлетворяющая условиям (6) называют колмогоровской. Известно [3], что система (5) с колмогоровской матрицей $Q(t)$ описывает марковские цепи с непрерывным временем с n возможными состояниями.

Теорема 2. Если матрица A и ненулевой вектор b постоянны и все собственные числа матрицы A имеют отрицательные вещественные части и выполнены условия (4), то существует единственное стационарное решение $p\in K^n$ в системе (3). Все остальные решения $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ при $x_0\in K^n$ системы (3) стремятся к нему при $t\to+\infty$.

Доказательство. Теорема 1 и условия (4а), (4б) и (4в) показывают, что существует стационарное решение, которое будет распределением вероятностей.

Стационарное распределение вероятностей удовлетворяет системе (1), то получаем формулу для стационарного (финального) распределения

$$p = -A^{-1}b \in K^n, \tag{7}$$

причем, матрица A в силу условий теоремы будет обратимой.

Пусть элементы $a_{ij}(t)$ матрицы $A(t)$ и компоненты $b_i(t)$ вектора $b(t)$ заданы при $t\geq 0$, вещественны и непрерывны, и пусть векторная функция $f(t,x,\mu)=(f_1,f_2,\ldots,f_n)$ задана при $x\in K^n, t\geq 0$, и $\mu\in(-\alpha,\alpha),(\alpha>0)$, вещественна, непрерывна и непрерывно дифференцируема по всем своим аргументам.

Теорема 3. Если выполнены условия теоремы 2 и условия (2), то существует положительное число μ_0 такое, что при $|\mu|<\mu_0$ в системе (1) будет существовать единственное стационарное решение $p\in K^n$. Все остальные решения $x(t)=x(t,t_0,x_0)$ при $x_0\in K^n$ системы (1) будут неограниченно приближаться к нему при $t\to+\infty$.

Теорема 4. Если элементы матрицы $A(t)$ и вектора $b(t)$ являются непрерывными $\omega-$периодическими функциями, удовлетворяющими

условиям (4) и все мультипликаторы системы (3) по модулю меньше единицы, то в этой системе существует единственное стационарное периодическое распределение вероятностей и все остальные распределения стремятся к нему при $t \to +\infty$.

Обозначим через $\varphi(t)$ стационарное периодическое распределение, а через φ_0 начальное распределение для $\varphi(t)$, тогда будем иметь

$$\varphi_0 = \left(E - X(\varpi)\right)^{-1} X(\varpi) \int_0^{\varpi} X^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau \,, \tag{8}$$

$$\varphi(t) = X(t)\varphi_0 + X(t) \int_0^{t} X^{-1}(\tau) b(\tau) d\tau \,. \tag{9}$$

где $X(t)$ – фундаментальная матрица решений соответствующей однородной системы $x^{!} = A(t)x$ нормированная в точке $t_0 = 0$.

Теорема 5. Пусть матрица $A(t)$ и вектор $b(t)$ являются ϖ – периодическими функциями и нулевое решение системы $\dot{x} = A(t)x$ асимптотически устойчиво по Ляпунову. Если выполнены условия теоремы 2 и условия (2), то существует положительное число μ_0 такое, что при любом $|\mu| < \mu_0$ система (1) будет иметь единственное стационарное периодическое распределение. Все остальные распределения будут сходиться к нему при $t \to +\infty$.

Заключение

В статье указаны условия при которых решения систем квазилинейных дифференциальных уравнений являются вероятностными распределениями. Указаны условия существования и единственности стационарного распределения в системе с постоянными и периодическими коэффициентами, и их асимптотической устойчивости.

Литература

1. Зубов В.И. Динамика управляемого движения. – М.: Высшая школа, 1982. – 385 с.
2. Красносельский М.А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1966. – 331 с.
3. Жуковский М.Е., Родионов И.В., Шабанов Д.А. Основы теории случайных процессов: учебное пособие. – М.: МФТИ, 2016. – 121 с.

References

1. Zubov V.I. [Dinamika upravlyaemogo dvizheniya] Dynamics of controlled motion. -Moscow: Vysshaya shkola, 1982. 385 p.
2. Krasnoselsky M.A. [Operator sdviga po traektoriyam differentsial'nykh uravnenij] A Shift Operator Along Trajectories of Differential Equations. - Moscow: Nauka, 1966. 331 p.
3. Zhukovsky M.E., Rodionov I.V., Shabanov D.A. [Osnovy teorii sluchajnykh protsessov: uchebnoe posobie] Fundamentals of the Theory of Random Processes: Tutorial. – Moscow: MFTI publ., 2016. 121p.

УДК 517.9

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ, НЕ РАЗРЕШИМЫЕ ОТНОСИТЕЛЬНО ПРОИЗВОДНОЙ РАСПРЕДЕЛЕННОГО ПОРЯДКА

© Федоров Владимир Евгеньевич
доктор физико-математических наук, профессор,
Челябинский государственный университет

Исследуются начальные задачи Коши и Шоуолтера – Сидорова для уравнений в банаховых пространствах распределенного порядка

$$\int_a^b D^\alpha Lx(t)d\alpha = \mathrm{Mx(t)} + \mathrm{f(t)},$$

где $0 \le a < b$, D^α – дробная производная Герасимова – Капуто порядка α, X, Y – банаховы пространства, L:D(L) $\to Y$, M:D(M) $\to Y$ – линейные замкнутые плотно определенные в X операторы, ker$L \ne \{0\}$, оператор M (L,p)-ограничен или пара (L,M) принадлежит классу $H^\alpha(\theta_0, a_0)$. Доказаны теоремы о существовании и единственности классического решения рассмотренных задач. Абстрактные результаты использованы для исследования вопросов однозначной разрешимости начально-краевых задач для уравнений и систем уравнений в частных производных, не разрешимых относительно распределенной производной по времени.

DIFFERENTIAL EQUATIONS IN BANACH SPACES, NOT SOLVABLE FOR THE DERIVATIVE OF THE DISTRIBUTED ORDER

Vladimir E. Fedorov
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
Chelyabinsk State University

The initial Cauchy and Showalter – Sidorov problems for equations in Banach spaces of distributed order are investigated

$$\int_a^b D^\alpha Lx(t)d\alpha = \mathrm{Mx(t)} + \mathrm{f(t)},$$

where $0 \le a < b$, D^α – Gerasimov – Caputo fractional derivative of order α, X, Y – banach space, L:D(L) $\to Y$, M:D(M) $\to Y$ – linear closed densely defined in X operators ,ker$L \ne \{0\}$, operator M (L,p) – limited or pair (L,M) belongs to class $H^\alpha(\theta_0, a_0)$. Theorems on existence and uniqueness of the classical solution of the considered problems are proved. Abstract results are used to study the problems of unambiguous solvability of initial boundary value problems for equations and systems of partial differential equations that are not solvable with respect to the distributed time derivative.

Литература

1. Стрелецкая Е.М., Федоров В.Е., Дебуш А. Задача Коши для уравнения распределенного порядка в банаховом пространстве // Мат. заметки СВФУ. 2018. Т.25, № 1. С.63-72.

2. Fedorov V.E., Streletskaya E.M. Initial-value problems for linear distributed-order differential equations in Banach spaces // Electron. J. Differential Equations. 2018. Vol.2018, no.176. P.1-17.

3. Fedorov V.E., Romanova E.A., Debbouche A. Analytic in a sector resolving families of operators for degenerate evolution fractional equations // Journal of Mathematical Sciences. 2018. Vol.228, no.4. P.380-394.

УДК 519.6

О ПОСТРОЕНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ ДВУХФАЗНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ В ТРЕЩИНОВАТО-ПОРИСТОЙ ДЕФОРМИРУЕМОЙ СРЕДЕ

© Цыдыпов Севан Гуро-Цыренович
Старший преподаватель
Бурятский государственный университет имени Доржи Банзарова
Россия, 670000, Улан-Удэ, ул. Смолина, 24а
E-mail: sivan77@mail.ru

Нами получена универсальная вычислительная технология, реализующая математическую модель процессов двухфазной фильтрации в трещиновато-пористой среде с учетом деформации горизонтального пласта.
Ключевые слова: пористый объем, анизотропная среда, двухфазная фильтрация, деформация, теория упругости, итерационно-разностная технология.

ABOUT THE CONSTRUCTION OF A MATHEMATICAL MODEL OF TWO-PHASE FILTRATION IN FRACTURED-POROUS DEFORMABLE MEDIUM

Sevan G.-Ts. Tsydypov
Senior lecturer
Buryat State University named after D. Banzarov
24a Smolina St., 670000, Ulan-Ude, Russia
E-mail: sivan77@mail.ru

In this article, we have obtained a universal computing technology that implements a mathematical model of two-phase filtration processes in a fractured porous medium, taking into account the deformation of the horizontal formation.
Keywords: porous volume, anisotropic medium, two-phase filtration, deformation, elasticity theory, iterative-difference technology.

Опираясь на математическую модель двухфазной фильтрации в трещиновато-пористых средах, сформулированную на основе работ Ван Генухтена (**Van** Genuchten) [2] и используя итерационно-разностный алгоритм, описанный нами в работе [5] мы разработали и реализовали вычислительную технологию для решения задач двухфазной фильтрации в анизатропных деформируемых средах. Для учета деформаций была использована модель линейно-упругой деформации пористого пласта пористого скелета, содержащего флюид в различной степени насыщенности.

Пласт будем считать линейно деформируемой средой, следующей закону Гука. В случае отсутствия влияния массовых сил перемещения точек пористой среды будут зависеть только от коэффициента Пуассона. Этот коэффициент в свою очередь будет зависеть от влагонасыщенности пласта. Однако из-за отсутствия данных по влиянию влаги, находящейся в порах, на характер деформации пористого каркаса, будем исходить из по-

стоянной величины коэффициента Пуассона. При этом, предлагаемая вычислительная технология без труда обобщается на случай переменной величины этого коэффициента. Таким образом, мы включаем в расчет напряжения, которые возникают в пористой среде из-за воздействия слоев, окружающей пласт среды.

Величина этих напряжений будет зависеть от степени деформации и от, как отмечалось выше, упругих свойств материала, составляющего пласт. Однако проще решение строить в перемещениях, а затем, используя реологическую модель линейного упругого тела, найти компоненты тензора искомых напряжений внутри тела и на границе.

Уравнения равновесия в перемещениях, записанные в декартовых координатах, имеют вид [8]:

$$\nabla^2 u + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\rho}{G} f_x = 0, \qquad (1)$$

$$\nabla^2 v + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\rho}{G} f_y = 0, \qquad (2)$$

$$\nabla^2 w + \frac{1}{1-2\nu}\frac{\partial \theta}{\partial z} + \frac{\rho}{G} f_z = 0, \qquad (3)$$

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}, \qquad (4)$$

где u, v, w – проекции смещения точки; x, y, z – декартовы координаты; ρ – плотность среды; f_x, f_y, f_z – проекции массовой силы на оси выбранной системы координат; θ – объемная деформация; $G = \frac{E}{2(1+\nu)}$ – модуль упругости при сдвиге; ν – коэффициент Пуассона; E – модуль Юнга; $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

В дальнейшем будем полагать, что нагрузки, прилагаемые к контактирующим элементам системы, настолько значительны, что их собственным весом по сравнению с нагрузками можно пренебречь, а силы электромагнитной природы вообще не будем принимать к рассмотрению, так что

$f_x = f_y = f_z = 0$.

Подставляя (4) в (1) – (3) и раскрывая оператор Лапласа, получим следующую систему определяющих уравнений в перемещениях:

$$b\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + (b-1)\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + (b-1)\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} = 0, \qquad (5)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + (b-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + (b-1)\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} = 0, \qquad (6)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + b\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (b-1)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + (b-1)\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} = 0, \qquad (7)$$

где $b = \dfrac{2-2\nu}{1-2\nu}$.

Следует сказать, что при формулировке задач теории упругости в компонентах перемещений как основных функций уравнения совместности деформаций удовлетворяются автоматически [2, с. 50]. После того как найдены компоненты перемещений, используя запись тензора Коши, можно определить компоненты деформации. При этом обобщенный закон Гука позволяет найти компоненты тензора напряжений.

Разностная схема

Умножая каждое из определяющих уравнений на r^2 и аппроксимируя производные в уравнениях (5)-(7) симметричными разностями на неравномерной сетке, получим

$$\begin{aligned} &a_s\left(u_{i,j+1,k}-u_{i,j,k}\right)-a_n\left(u_{i,j,k}-u_{i,j-1,k}\right)+ba_w\left(u_{i+1,j,k}-u_{i,j,k}\right)- \\ &-ba_e\left(u_{i,j,k}-u_{i-1,j,k}\right)+a_b\left(u_{i,j,k+1}-u_{i,j,k}\right)- \\ &-a_t\left(u_{i,j,k}-u_{i,j,k-1}\right)-u_{i,j,k}+s_{p1}=0 \end{aligned} \quad , \qquad (8)$$

$$\begin{aligned} &ba_s\left(v_{i,j+1,k}-v_{i,j,k}\right)-ba_n\left(v_{i,j,k}-v_{i,j-1,k}\right)+a_w\left(v_{i+1,j,k}-v_{i,j,k}\right)- \\ &-a_e\left(v_{i,j,k}-v_{i-1,j,k}\right)+a_b\left(v_{i,j,k+1}-v_{i,j,k}\right)-a_t\left(v_{i,j,k}-v_{i,j,k-1}\right)- \\ &-bv_{i,j,k}+s_{p2}=0 \end{aligned} \quad , \qquad (9)$$

$$\begin{aligned} &a_s\left(w_{i,j+1,k}-w_{i,j,k}\right)-a_n\left(w_{i,j,k}-w_{i,j-1,k}\right)+a_w\left(w_{i+1,j,k}-w_{i,j,k}\right)- \\ &-a_e\left(w_{i,j,k}-w_{i-1,j,k}\right)+ba_b\left(w_{i,j,k+1}-w_{i,j,k}\right)- \\ &-ba_t\left(w_{i,j,k}-w_{i,j,k-1}\right)+s_{p3}=0 \end{aligned} \quad , \qquad (10)$$

где $a_e = \dfrac{2}{\left(x_i-x_{i-1}\right)\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right)}$, $a_w = \dfrac{2}{\left(x_{i+1}-x_i\right)\left(x_{i+1}-x_{i-1}\right)}$, (11)

$$a_n = \frac{2}{\left(y_j-y_{j-1}\right)\left(y_{j+1}-y_{j-1}\right)},\ a_s = \frac{2}{\left(y_{j+1}-y_j\right)\left(y_{j+1}-y_{j-1}\right)}, \qquad (12)$$

$$a_t = \frac{2}{\left(z_k-z_{k-1}\right)\left(z_{k+1}-z_{k-1}\right)},\ a_b = \frac{2}{\left(z_{k+1}-z_k\right)\left(z_{k+1}-z_{k-1}\right)}, \qquad (13)$$

$$\begin{aligned} S_{p1} &= \frac{(b-1)(v_{i+1,j+1,k}-v_{i+1,j-1,k}-v_{i-1,j+1,k}+v_{i-1,j-1,k})}{(x_{i+1}-x_{i-1})(y_{j+1}-y_{j-1})} \\ &+\frac{(b-1)(w_{i+1,j,k+1}-w_{i+1,j,k-1}-w_{i-1,j,k+1}+w_{i-1,j,k-1})}{(x_{i+1}-x_{i-1})(z_{k+1}-z_{k-1})} \end{aligned} \qquad (14)$$

$$S_{p2} = \frac{(b-1)(u_{i+1,j+1,k} - u_{i+1,j-1,k} - u_{i-1,j+1,k} + u_{i-1,j-1,k})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(y_{j+1} - y_{j-1})} + \frac{(b-1)(w_{i,j+1,k+1} - w_{i,j+1,k-1} - w_{i,j-1,k+1} + w_{i,j-1,k-1})}{(y_{j+1} - y_{j-1})(z_{k+1} - z_{k-1})} \quad (15)$$

$$S_{p3} = \frac{(b-1)(u_{i+1,j,k+1} - u_{i+1,j,k-1} - u_{i-1,j,k+1} + u_{i-1,j,k-1})}{(x_{i+1} - x_{i-1})(z_{k+1} - z_{k-1})} + \frac{(b-1)(v_{i,j+1,k+1} - v_{i,j+1,k-1} - v_{i,j-1,k+1} + v_{i,j-1,k-1})}{(y_{j+1} - y_{j-1})(z_{k+1} - z_{k-1})} \quad (16)$$

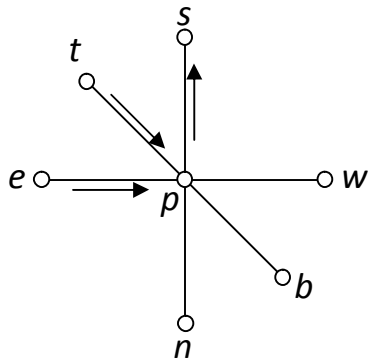


Рис 1. Шаблон разностной сетки (стандартный для регулярной сетки). Стрелками показаны направления возрастания индексов

Из разностных уравнений получаем следующие рекуррентные формулы для определения значений перемещений во внутренних точках:

$$u_{i,j,k} = \frac{a_e u_{i,j-1,k} + a_w u_{i,j+1,k} + ba_n u_{i-1,j,k} + ba_s u_{i+1,j,k} + a_t u_{i,j,k-1} + a_b u_{i,j,k+1} + s_{p1}}{a_p + a_n(b-1) + a_s(b-1)}, \quad (24)$$

$$v_{i,j,k} = \frac{ba_e v_{i,j-1,k} + ba_w v_{i,j+1,k} + a_n v_{i-1,j,k} + a_s v_{i+1,j,k} + a_t v_{i,j,k-1} + a_b v_{i,j,k+1} + s_{p2}}{a_p + a_e(b-1) + a_w(b-1)}, \quad (25)$$

$$w_{i,j,k} = \frac{a_e w_{i,j-1,k} + a_w w_{i,j+1,k} + a_n w_{i-1,j,k} + a_s w_{i+1,j,k} + ba_t w_{i,j,k-1} + ba_b w_{i,j,k+1} + s_{p3}}{a_p + a_t(b-1) + a_b(b-1)}, \quad (26)$$

которые могут быть использованы при проведении расчетов по методу простой итерации. Здесь $a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + a_t + a_b$.

Формулы (17)–(19) реализуют решения пространственных уравнений Ляме, и используемые совместно с разностными граничными условиями пригодны для решения всех задач линейной теории упругости в декартовых координатах на неравномерных сетках. Таким образом, задачу упругого деформирования пласта мы решаем тем же итерационным методом.

Литература

1. Shikuo C. Displacement Mechanism of the Two-Phase Flow Model for Water and Gas Based on Adsorption and Desorption in Coal Seams / Chen Shikuo, Yang Tianhong, Wei Chenhui // Materials of Int. Symposium on Multi-field Coupling Theory of Rock and Soil Media and Its Applications, Chengdu City, CHINA. – 2010. – P. 597-603.
2. Van Genuchten M.Th. A closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils / M. Th. van Genuchten // Soil Sci. Soc. Am. J. – 1980. – Vol. 44. – P. 892-898.
3. Schaap M.G. A modified Mualem–van Genuchten formulation for improved description of the hydraulic conductivity near saturation / M. G. Schaap, M. Th. van Genuchten // Vadose Zone J. – 2006. – Vol. 5. – P. 27-34.
4. Никитин К.Д. Метод конечных объемов для задачи конвекции-диффузии и моделей двухфазных течений: дис. … канд. физ.-мат. наук / К. Д. Никитин. – М., 2010. – 105 с.
5. Бубенчиков А. М., Цыдыпов С. Г. Построение математической модели двухфазной фильтрации в анизотропных средах./ Геометрия многообразий и ее приложения / Улан-Удэ : Изд-во Бурятского госуниверситета, 2014. с. 75-81.
6. Хан Х. Теория упругости. Основы линейной теории и ее применения. – М. : Мир, 1988. – 344 с.

References

1. Shikuo C. Displacement Mechanism of the Two-Phase Flow Model for Water and Gas Based on Adsorption and Desorption in Coal Seams / Chen Shikuo, Yang Tianhong, Wei Chenhui // Materials of Int. Symposium on Multi-field Coupling Theory of Rock and Soil Media and Its Applications, Chengdu City, CHINA. – 2010. – P. 597-603.
2. Van Genuchten M.Th. A closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils / M. Th. van Genuchten // Soil Sci. Soc. Am. J. – 1980. – Vol. 44. – P. 892-898.
3. Schaap M.G. A modified Mualem–van Genuchten formulation for improved description of the hydraulic conductivity near saturation / M. G. Schaap, M. Th. van Genuchten // Vadose Zone J. – 2006. – Vol. 5. – P. 27-34.
4. Nikitin K. D. finite volume Method for convection-diffusion problem and two-phase flow models: dis. ... kand. p. Mat. sciences' / K. D. Nikitin. – M., 2010. 105 p.
5. A. M. Bubenchikov, Tsydypov S. G. Construction of a mathematical model of two-phase filtration in anisotropic media./ Geometry of varieties and its applications / Ulan-Ude : publishing House of Buryat state University, 2014. p. 75-81.
6. Han H. Theory of elasticity. Fundamentals of linear theory and its application. – M.: World, 1988. – 344 p.

УДК 517.911+517.983.51

ОБ ОДНОЙ СПЕЦИАЛЬНОЙ ОПЕРАТОР-ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРИМЕНЕНИИ В ПОСТРОЕНИИ ФУНДАМЕНТАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ[1]

© Шеметова Валентина Владимировна
магистрант
Иркутский государственный университет
Россия, 664003, Иркутск, б-р Гагарина, 20
E-mail: valentina501@mail.ru

Предполагаемый доклад посвящен проблеме разрешимости начальной задачи для класса линейных дифференциально-операторных уравнений в банаховых пространствах. Исследование поставленной задачи проводится с помощью теории обобщенных функций (распределений) Соболева–Шварца со значениями в банаховых пространствах. Построено фундаментальное решение абстрактного дифференциального оператора, соответствующего рассматриваемому уравнению. Центральное место в работе занимает специальная оператор-функция, получаемая из классической формулы Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа в некоммутативном гармоническом анализе. Эта оператор-функция содержит коммутаторы операторных коэффициентов уравнения, что позволило ослабить условие коммутативности их суперпозиции. В случае перестановочности операторных коэффициентов получен новый вид фундаментального решения в форме операторно-функционального ряда по гипергеометрической функции Куммера для дифференциально-операторного уравнения второго порядка. Предлагаемый подход применим к объектам иной природы, а именно дифференциально-операторным уравнениям с отклоняющимся аргументом.

Ключевые слова: абстрактное дифференциальное уравнение второго порядка, банахово пространство, коммутатор операторов, обобщенная функция, формула Бейкера–Кемпбелла–Хаусдорфа, фундаментальное решение.

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ № 18-01-00643 А и № 18-51-54001 Вьет_а.

A SUBSTANTIVE INTERPRETATION OF THE DUAL PROBLEM IN CONTROLLED DYNAMIC SYSTEMS ON THE BASIS OF SUFFICIENT CONDITIONS FOR AN ABSOLUTE MINIMUM

© Achituev Sambu
Dorzhi Banzarov Buryat State University
24a Smolina St., Ulan-Ude 670000, Russia

© Achituev Bato
East-Siberian State University of Technology and Management

The article is devoted to a new economic interpretation of sufficient conditions for an absolute minimum in the form of Krotov. It is known that, in optimal control, the economic interpretation of the trajectory in the Pontryagin maximum principle is based on the connection with the Bellman function, if it is differentiable, and the optimization problem in the Bellman equation is solved. The current value - $\psi(t)$ the vector - characterizes the sensitivity of the task value to a small deviation of the current phase state of the system from the optimal trajectory of the task. This interpretation is useful in applications to models of economic dynamics. A new economic interpretation is proposed, based on the concepts of an absolute minimum in the control problem. With the use of Krotov's resolving function, while investigating the search based task we have minimal, we thereby analyze and solve a certain family of optimization problems. With an arbitrary choice of the Krotov function, here with the corresponding properties (a sufficiently smooth numerical function that is continuous in its arguments), various constructions of the function structure are defined which, in turn, implies a non-uniqueness of the solution, and in the general case a solution in the form of a trunk, as a solution invariant with respect to part of the boundary conditions (it does not have to belong to the set of admissible ones). The immediate economic interpretation of dual variables consists in the identification by them of a certain system of market prices of economic factors or what is defined as a state of a dynamic process.

References

1. Achituev.S.A, Uhin M.YU., Development strategy Optimization of the region on multicomponent of the models., 2008 № 3., Automation and Remote Control, Moscow, 178-189.
2. Gurman V.I. The extension principle in control problems. – M.: Nauka. Fizmatlit, 1997, 288.

ON THE ENRICHMENT OF FINITE-ELEMENT APPROXIMATIONS

© Allal Guessab
Laboratoire de Mathématiques et de leurs Applications
Université de Pau et des Pays de l'Adour, France
e-mail: allal.guessab@univ-pau.fr

The objective of this presentation is: Assume given an approximation operator. Then as an important question is how we can improve it? Here we consider this problem when the given operator is the (conforming and nonconforming) finite elements approximation operator. We also briefly discuss some ongoing related research, and summarizes the major parts of my current research related to this topic.

References

1. Guessab Allal, Zaim Yassine, A Unified and General Framework for Enriching Finite Element Approximations, Springer International Publishing AG 2017 N.K. Govil et al. (eds.), Progress in Approximation Theory and Applicable Complex Analysis, Springer Optimization and Its Applications 117, 2018, 491–519.

2. Achchab, Boujemâa, Agouzal, Abdellatif, Guessab, Allal, Zaim, Yassine, An extended family of nonconforming quasi-Wilson elements for solving elasticity problem. Appl. Math. Comput. 344/345 (2019), 1–19.

3. Achchab, Boujemâa, Bouihat, Khalid; Guessab, Allal, Schmeisser, Gerhard A general approach to the construction of nonconforming finite elements on convex polytopes. Appl. Math. Comput. 268 (2015), 916-923.

4. Achchab, Boujemâa; Guessab, Allal, Zaim, Yassine, A new class of nonconforming finite elements for the enrichment of Q1 element on convex polytope. Appl. Math. Comput. 271 (2015), 657-668.

REGULARITY OF MULTIPLIERS IN SECOND-ORDER OPTIMALITY CONDITIONS FOR SEMILINEAR ELLIPTIC OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

© B. T. Kien
Department of Optimization and Control Theory
Institute of Mathematics, Vietnam Academy of Science and Technology
18 Hoang Quoc Viet road, Hanoi, Vietnam
e-mail: btkien@math.ac.vn

A class of semilinear elliptic optimal control problems with mixed pointwise constraints is considered. Some criteria under which Lagrange multipliers are functions in L^p-spaces are given. Based on the criteria, we establish first-and second-order necessary optimality conditions of KKT-type as well as second-order sufficient optimality conditions for the problem.
Keywords: Regularity of multipliers; Second-order optimality conditions; Semilinear elliptic optimal control problems.

AMS Subject Classifications. 49K15 · 90C29

1 Introduction

Let Ω be an open and bounded set in $\mathbb{R}^N$ with $N = 2,3$ and the boundary $\partial\Omega$ of class C^2. We consider the semilinear elliptic optimal control problem of finding a control function $u \in L^\infty(\Omega)$ and the corresponding state function $y \in W^{2,2}(\Omega) \cap W_0^{1,2}(\Omega)$ which solve

$$J(y,u) = \int_\Omega L(x, y(x), u(x))dx \to \min \tag{1}$$

s.t.

$$Ay = f(x,y,u) \text{ in } \Omega,\ y = 0 \quad \text{on } \partial\Omega, \tag{2}$$

$$a(x) \le g(x, y(x), u(x)) \le b(x), \text{ a.e. } x \in \Omega, \tag{3}$$

where operator A is defined by

$$Ay = -\sum_{i,j=1}^{N} D_i(a_{ij}(x) y_{x_j}(x)),$$

the mappings $L, f, g : \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ are Carathéodory functions and $a, b \in L^\infty(\Omega)$.

The establishment of first-and second-order optimality conditions for optimal control problem governed by semi-linear elliptic equations is an ongoing topic, which has been interested by many mathematicians so far (see for instances [2], [3], [5], [12], [15] and [16]). In the class of these optimal control

problems, the control variables often belong to either spaces $L^p(\Omega)$ with $1 \le p < \infty$ or $L^\infty(\Omega)$ and so the establishment of optimality conditions depend on those situations. When $u \in L^p(\Omega)$ with $1 \le p < \infty$, we can obtain the existence of regular Lagrange multipliers for optimal control problems. Namely, in this case the Lagrange multipliers belong to $L^q(\Omega)$ which is the dual space of $L^p(\Omega)$. However, in the case of $u \in L^p(\Omega)$ with $1 \le p < \infty$, the cost function J as well as mappings f and g are difficult to be differentiable with respect to u on spaces $L^p(\Omega)$. To surmount this difficulty, we can require that the control variable u belongs to space $L^\infty(\Omega)$, but in this situation, the Lagrange multipliers are measures rather than functions. It leads to a problem of studying the regularity of Lagrange multipliers, that is to find conditions under which Lagrange multipliers are functions in L^p-spaces. This problem has been studying by some authors recently (see for instance [15] and [16]). Particularly, in [16] by using the Yosida-Hewitt theorem, A. Rösch and F. Tröltzsch showed that, under certain conditions, the Lagrange multipliers are of L^p-spaces.

The aim of this talk is to present another criterion under which the Lagrange multipliers in optimality conditions of problem (1)-(3) are functions of L^p-spaces. We show that when the Robinson constraint qualification is valid, then there exist regular Lagrange multipliers for locally optimal solutions of problem (1)-(3). In order to obtain such a result we shall use an important result in [7] on the representation of functional on $L^\infty(\Omega)$ by a density in $L^1(\Omega)$. It is worth pointing out that, in our result the condition for regularity of Lagrange multipliers is easy to verify and the proof of the obtained results are di□erent from proofs in previous papers.

2 Regularity of multipliers and second-order necessary optimality conditions

Throughout the paper $\|\cdot\|_{m,p}$ and $\|\cdot\|_p$ denote the norms in $W^{m,p}(\Omega)$ and $L^p(\Omega)$, respectively. For convenience, we put

$$Y = W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega), U = L^\infty(\Omega), Z = Y \times U$$

and

$$Q_\infty = \{v \in L^\infty(\Omega) \mid a(x) \le v(x) \le b(x) \text{ a.e.}\}. \tag{4}$$

We denote by Φ the admissible set of problem (1)-(3), that is,

$$\Phi = \{(y,u) \in Y \times U \mid (y,u) \text{ satisfies(2)-(3)}\}. \tag{5}$$

Let φ stand for L,f and g. Fixing any $(\bar{y},\bar{u}) \in \Phi$, the symbols $\varphi[x], \varphi_y[x], \varphi_u[x], \varphi_{yu}[x]$ and $\varphi_{uu}[x]$ stand for

$\varphi(x,\bar{y}(x),\bar{u}(x))$, $\varphi_y(x,\bar{y}(x),\bar{u}(x))$, $\varphi_u(x,\bar{y}(x),\bar{u}(x))$, $\varphi_{yu}(x,\bar{y}(x),\bar{u}(x))$ and $\varphi_{uu}(x,\bar{y}(x),\bar{u}(x))$, respectively.

Let us impose the following assumptions related to $(\bar{y},\bar{u})$.

$(A1)$ Coefficients $a_{ij} \in C^{0,1}(\Omega)$ satisfy $a_{ij} = a_{ji}$ and there exists a number $\lambda > 0$ such that

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \lambda \sum_{i=1}^{N} |\xi_i|^2 \quad \forall x \in \Omega,\ (\xi_1,...,\xi_N) \in \mathbb{R}^N.$$

$(A2)$ $f_y(x,y,u) \leq 0$ for all $(x,y,u) \in \Omega \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$(A3)$ $\varphi(x,\cdot,\cdot)$ is of class C^2 such that $|\varphi(x,0,0)|$ and $|D_{(y,u)}\varphi(x,0,0)|$ are bounded, and for each $M > 0$, there exists a number $k_{\varphi M} > 0$ such that

$$|\varphi(x,y_1,u_1) - \varphi(x,y_2,u_2)| + |D_{(y,u)}\varphi(x,y_1,u_1) - D_{(y,u)}\varphi(x,y_2,u_2)|$$
$$+ |D^2_{(y,u)}\varphi(x,y_1,u_1) - D^2_{(y,u)}\varphi(x,y_2,u_2)| \leq k_{\varphi M}(|y_1 - y_2| + |u_1 - u_2|)$$

for all $x \in \Omega$ and $y_i, u_i \in \mathbb{R}$ satisfying $|y_i| \leq M$, $|u_i| \leq M$ with $i = 1,2$.

$(A4)$ There exists a constant $\gamma > 0$ such that

$$|g_u(x,\bar{y}(x),\bar{u}(x))| \geq \gamma \text{ a.e. } x \in \Omega \tag{6}$$

and

$$-f_y[x] + \frac{f_u[x]g_y[x]}{g_u[x]} \geq 0 \text{ a.e. } x \in \Omega \tag{7}$$

Note that assumptions $(A1)$ and $(A2)$ guarantee that for each $u \in L^\infty(\Omega)$ the state equation (2) has a solution $y \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$. Meanwhile assumption $(A3)$ insures that the objective function J, the mapping $\hat{f}(y,u)$ and $\hat{g}(y,u)$ are differentiable on $(W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)) \times L^\infty(\Omega)$, where $\hat{f}(y,u)$ and $\hat{g}(y,u)$ are defined by

$$\hat{f}(y,u)(x) = f(x,y(x),u(x)),\ \hat{g}(y,u)(x) = g(x,y(x),u(x)). \tag{8}$$

Hypothesis $(A4)$ is very important for regularity of Lagrange multipliers. Besides, condition (7) in $(A4)$ makes sure that the Robinson constraint qualification is fulfilled. Let us give an illustrative example showing that f and g satisfies assumption $(A4)$.

Example 2.1 The following formulae of f and g satisfies assumption $(A4)$.

$$f(x,y,u) = -y^3 + u^3,\ g(x,y,u) = u,$$
$$f(x,y,u) = -yu^2,\ g(x,y,u) = u^3 - u^2 + 2u,$$
$$f(x,y,u) = x^2u^2,\ g(x,y,u) = \psi(x) + y^2u^3 + u,$$

where ψ is a continuous function on Ω.

We now have the following lemma on the existence of solutions of the

state equation. Its proof can be found in [3] and [12, Proposition 1.1, Chapter 5].

Lemma 2.1 Suppose that the entries a_{ij} and f satisfy assumptions $(A1)$ and $(A2)$. Then for each $u \in L^{\infty}(\Omega)$, the equation (2) has a solution $y \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$. Moreover, there exists a constant $C_2 > 0$ such that

$$\| y \|_{\infty} + \| y \|_{2,2} \leq C_2, \ \forall u \in L^{\infty}(\Omega). \tag{9}$$

Recall that, a functional $e^* \in L^{\infty}(\Omega)^*$ is said to be represented by a density in

L^1 – space, if there exists a function $\phi \in L^1(\Omega)$ such that

$$\langle e^*, v \rangle = \int_{\Omega} \phi(x) v(x) dx \ \forall v \in L^{\infty}(\Omega).$$

Given a measurable set $B \subset \Omega$, we denote by χ_B the characteristic function of B, that is,

$$\chi_B(x) = \begin{cases} 1 \ if \ x \in B, \\ 0 \ if \ x \notin B. \end{cases} \tag{10}$$

The following lemma gives a criterion for functional on $L^{\infty}(\Omega)$ can be represented by a L^1 – density. It plays an important role in the proof of regularity of Lagrange multipliers.

Lemma 2.2 [7, Proposition 5, Chapter 8] A functional $e^* \in L^{\infty}(\Omega)^*$ is represented by a L^1 – density if and only if for any sequence $\{\Delta_k\}$ of measurable subsets of Ω with $\Delta_k \to 0$, one has $\| e^*_{\Delta_k} \| \to 0$ as $k \to \infty$. Here $e^*_{\Delta_k}$ is defined by

$$\langle e^*_{\Delta_k}, v \rangle = \langle e^*, \chi_{\Delta_k} v \rangle \ \forall v \in L^{\infty}(\Omega),$$

and $| \Delta_k |$ denotes the Lebesgue measure of Δ_k.

Recall that a couple $(\bar{y}, \bar{u}) \in \Phi$ is said to be a locally optimal solution of problem (1)-(3) if there exists a number $\varepsilon > 0$ such that for all $(y,u) \in \Phi$ with $\| y - \bar{y} \|_{2,2} + \| u - \bar{u} \|_{\infty} < \varepsilon$, one has $J(y,u) \geq J(\bar{y}, \bar{u})$.

Let us denote by $C_0[(\bar{y}, \bar{u})]$ the set of couples $(y,u) \in Y \times U$ satisfying the following conditions:

(c_1) $\langle \nabla J(\bar{y}, \bar{u}), (y,u) \rangle = \int_{\Omega} (L_y[x] y(x) + L_u[x] u(x)) dx \leq 0;$

$(c_2) = Ay - f_y[\cdot] y - f_u[\cdot] u = 0;$

$(c_3) = g_y[\cdot] y - g_u[\cdot] u \in \text{cone}(Q_{\infty} - g[\cdot]).$

The closure of $C_0[(\bar{y}, \bar{u})]$ in $Y \times U$ is said to be the critical cone to problem (1)-(3) at $(\bar{y}, \bar{u})$ and is denoted by $C[(\bar{y}, \bar{u})]$. Here is our main result.

Theorem 2.1 Suppose that $(\bar{y}, \bar{u}) \in \Phi$ is a locally optimal solution of problem (1)-(3) and assumptions $(A1) - (A4)$ are satisfied. Then there exist func-

tions $\vartheta \in W_0^{1,2}(\Omega) \cap W^{2,2}(\Omega)$ and $e \in L^2(\Omega)$ such that the following conditions are fulfilled:

(i) (the adjoint equation)

$$A^*\vartheta - f_y[\cdot]\vartheta = -L_y[\cdot] - g_y[\cdot]e \text{ in } \Omega,\ \vartheta = 0 \text{ on } \partial\Omega; \tag{11}$$

(ii) (the stationary condition in u)

$$L_u[\cdot] - f_u[\cdot]\vartheta + g_u[\cdot]e = 0 \text{ a.e.}; \tag{12}$$

(iii) (the complimentary condition)

$$g[x] = \max\big(a(x), \min(e(x) + g[x], b(x))\big) \text{a.e. } x \in \Omega; \tag{13}$$

(iv) (the nonnegative second-order condition)

$$\begin{aligned}&\int_\Omega (L_{yy}[x]y(x)^2 + 2L_{yu}[x]y(x)u(x) + L_{uu}[x]u(x)^2)dx\\ &-\int_\Omega \vartheta(x)(f_{yy}[x]y(x)^2 + 2f_{yu}[x]y(x)u(x) + f_{uu}[x]u(x)^2)dx\\ &+\int_\Omega e(x)(g_{yy}[x]y(x)^2 + 2g_{yu}[x]y(x)u(x) + g_{uu}[x]u(x)^2)dx \geq 0\end{aligned}$$

for all $(y,u) \in C[(\bar{y},\bar{u})]$. Moreover, one has $e \in L^\infty(\Omega)$.

References

1. J. F. Bonnans and A. Shapiro, Perturbation Analysis of Optimization Problems, Springer, New York, 2000.

2. J. F. Bonnans and E. Casas, An extension of Pontryagin's principle for state-constrained optimal control of semilinear elliptic equations and varational inequalities, SIAM J. Control and Optim., 33(1995), 274-298.

3. T. Bayen, J. F. Bonnans and F. J. Silva, Characterization of local quadratic growth for strong minima in the optimal control of semi-linear elliptic equations , Tran. Arm. Math. Soc., 366(2014), 2063-2087.

4. H. Brézis, Functional Analysis, Sobolev spaces and Partial Di erential Equations, Springer, 2010.

5. E. Casas and F. Tröltzsch, Recent advances in the analysis of pointwise state-constrained elliptic optimal control problems, ESAIM: COCV 16 (2010), 581600.

6. E. Casas, Second order analysis for bang-bang control problems of PDEs, SIAM J. Control Optim., 50(2012), 2355-2372.

7. A. D. Ioffe and V. M. Tihomirov, Theory of Extremal Problems, North-Holland Publishing Company, 1979.

8. R. Cominetti, Metric regularity, tangent sets, and second-order optimality conditions, Appl. Math. Optim., 21 (1990), pp. 265–287.

9. B. T. Kien and V. H. Nhu, Second-order necessary optimality conditions for a class of semilinear elliptic optimal control problems with mixed pointwise constraints, SIAM J. Control Optim., 52 (2014), pp. 1166–1202.

10. B. T. Kien, V. H. Nhu and N. H. Son, Second-order optimality conditions for a semilinear elliptic optimal control problem with mixed pointwise constraints, Set-valued and Var. Anal., 25(2017), 177210.

11. B. T. Kien, N. V. Tuyen and J. -C. Yao, Second-order KKT optimality conditions for multi-objective optimal control problems, SIAM J. Control Optim., 56(2018), 40694097.

12. X. Li and J. Yong, Optimal Control Theory for Infinite Dimensional Systems, Birkhäuser, 1995.

13. Z. Páles, Characterization of L^1 – closed decomposable sets in L^∞, J. Math. Anal. Appl., 238(1999), 491-515.

14. Z. Páles and V. Zeidan, First-and second-order optimality conditions for a local minimum in control problems with pure state constraints, Nonlinear Analysis 67(2007) 2506-2526.

15. A. Rösch and F. Tröltzsch, Existence of regular Lagrange multiplier for a nonlinear elliptic optimal control problem with pointwise control-state constraints , SIAM J. Control Optim., 45(2006), 548564.

16. A. Rösch and F. Tröltzsch, On regularity of solutions and Lagrange multipliers of optimal control problems for semi-linear elliptic equations with with pointwise controlstate constraints, SIAM J. Control Optim., 46(2007), 10981115.

17. L. C. Evans, Partial Differential Equations, American Mathematical Society, 2010.

18. J. Zowe and S. Kurcyusz, Regularity and stability for the mathematical programming problem in Banach spaces, Appl. Math. Optim., 5 (1979), pp. 49–62.

OPTIMAL DECAY RATE OF GLOBAL SOLUTIONS TO THE SCHÖDINGER EQUATION WITH CUBIC DISSIPATIVE NONLINEARITY[1]

© Naoyasu Kita
Faculty of advanced science and technology
Kumamoto university
Japan
E-mail: nkita@kumamoto-u.ac.jp

We treat the optimality of decay estimate of solutions to the Cauchy problem of 1D Schrödinger equations including linear and cubic dissipative nonlinearity $-i\mu u+\lambda|u|^2$, where $\lambda\in C$ if $\mu>0$, and $\mathrm{Im}\,\lambda<0$ if $\mu=0$. Our aim is to obtain the fact that, if the L^∞-norm of a solution admits a decay rate more rapid than the designated one, then it must be trivial.
Keywords: nonlinear Schrödinger equation, decay estimate, critical dissipative nonlinearity.

2000 Mathematics Subject Classification. Primary 35Q55; Secondary 35B40.

1 Introduction and main result

We consider the Cauchy problem of 1D-nonlinear Schrödinger equation:

$$\begin{cases} i\partial_t u+\dfrac{1}{2}\partial_x^2 u=-i\mu u+\lambda\,|\,u\,|^2\,u, \\ u(0,x)=u_0(x), \end{cases} \tag{1.1}$$

where $t\in[0,\infty)$, $x\in R$, $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$ $(\lambda_1,\lambda_2\in R)$ if $\mu>0$, and $\lambda=\lambda_1+i\lambda_2$ $(\lambda_1\in R,\lambda_2<0)$ if $\mu=0$. By considering the associated nonlinear ODE: $i\partial_t u=-i\mu u+\lambda|u|^2u$, we see that $\partial_t|u|^2=-\mu|u|^2+\lambda_2|u|^4\le 0$. Therefore the conditions for μ and λ imply the dissipation. The equation as in (1.1) arises in the nonlinear optical fiber engineering. According to [1] or physical manuscript [2], there is a complex Ginzburg-Landau equation:

$$i\frac{\partial U}{\partial\xi}-\frac{1}{2}(s+id)\frac{\partial^2U}{\partial\tau^2}+N^2|U|^2U=-i\mu U+i(\mu_0-\mu_2|U|^2)U,$$

where $U=U(\xi,\tau)$ denotes the dimension-less amplitude of electric field propagating through an optical fiber, ξ the position along the optical fiber, τ the time-variable expressing the oscillation of the electric field, s,d,N,μ,μ_0 and μ_2 denotes the scales of dispersion, diffusion, nonlinear Kerr effect, lin-

[1] Author's work was supported in part by JSPS Grant-in-Aid for Scientific Research (C) No.17K05305.

ear dissipation, linear amplification and nonlinear dissipation, respectively. Therefore the equation (1.1) corresponds to the special case of this model, in which $s<0, d=0$ and $\mu_0=0$. We want to treat this model as an evolution equation, and so replace the variables ξ and τ by t and x respectively, following mathematical convention. Henceforth we will observe the decay of $u=u(t,x)$ as $t\to\infty$.

It is well known that the large-time asymptotic behavior of global solutions to (1.1) is similar to that of solutions to the corresponding linear equation if $\mu>0,$ and different from that of solutions to the corresponding linear equation if $\mu=0$ and $\lambda_2<0$ (see [3]). In the case of $\mu>0$ and restricted to the small amplitude solution, the u is expected to be governed by the linear equation: $i\partial_t u+\frac{1}{2}\partial_x^2=-i\mu u.$ Therefore we can obtain the estimate

$$\|u(t)\|_{L^\infty}\le Ct^{-\frac{1}{2}}e^{-\mu t} \tag{1.2}$$

and the nonlinear effect is not visible in the decay rate. On the other hand, in thecase of $\mu=0$ and $\lambda_2<0$ the nonlinearity keeps affecting the solution for a long time There are some works on the small initial value problem of (1.1) (see e.g., [5]),in which the L^∞-decay estimate of global solutions, i.e.,

$$\| u(t) \|_{L^\infty}\le Ct^{-1/2}(\log t)^{-1/2} \tag{1.3}$$

was proved. The large initial value problem of (1.1) together with strong dissipative condition: $|\lambda_1|\le\sqrt{3}|\lambda_2|$ was considered in [4], where the L^∞-decay estimate as in(1.3) was proved. Our purpose in this paper is to investigate the optimality of decay

rates in (1.2) and (1.3). In other words, we are going to prove that, if a solution decays more rapidly than the right hand side of (1.2) and (1.3), then the initial data u_0 must be 0. Our main results are:

Theorem 1.1. (Linear Dissipation) *Let $\mu>0$. We also assume that, for $u_0\in H^1\cap H^{0,1}$, the solution u to (1.1) is well-posed in $C([0,\infty);H^1\cap H^{0,1})\cap C^1([0,\infty);H^{-1})$. If the solution admits a decay estimate like*

$$\| u(t) \|_{L^\infty}=o(t^{-1/2}e^{-\mu t}) \tag{1.4}$$

as $t\to\infty$ then $u_0=0.$

Theorem 1.2. (Nonlinear Dissipation) *Let $\mu=0$ and $\lambda_2<0$. We also assume that, for $u_0\in H^1\cap H^{0,1}$, the solution u to (1.1) is well-posed in $C([0,\infty);H^1\cap H^{0,1})\cap C^1([0,\infty);H^{-1})$. If the solution admits a decay estimate*

like

$$\| u(t) \|_{L^\infty} = o(t^{-1/2}(\log t)^{-1/2}) \tag{1.5}$$

as $t \to \infty$ *then* $u_0 = 0.$

Remark. Theorem1.2 suggests that the solutions, which was obtained in [4], [5] andindicate the decay rate as in (1.3), are optimal. We can no more refine the decay

rate of solutions to (1.1), except for $u_0 = 0.$

Throughout this paper, we employ the following notation. For $q \in [1,\infty)$, the L^q denotes the set of measurable function f satisfying $\|f\|_{L^q} := \int_R |f(x)|^q \, dx < \infty$ The L^∞ denotes the set of measurable function f satisfying $\|f\|_{L^\infty} := ess.\sup|f(x)| < \infty.$

The Sobolev space H^1 stands for the set of integrable function f such that $f \in L^2$ and the derivative in distribution sense $\partial_x f \in L^2$. The norm of H^1 is given by $\|f\|_{H^1} := \|f\|_{L^2} + \|\partial_x f\|_{L^2}$. The dual space of H^1 is denoted by H^{-1}. The norm of the weighted Sobolev space is defined by $\|f\|_{H^{s,\alpha}} := \left\| \langle x \rangle^\alpha \langle -i\partial_x \rangle^s f \right\|_{L^2}$.

We often use the operator $J = x - it\partial_x$ which the generator of Galilean transform, i.e., $u_\varepsilon(t,x) = e^{i\varepsilon x - it\varepsilon^2} u(t, x - t\varepsilon).$ The operator J has another description like

$$J = U(t)xU(-t),$$

where $U(t) = \exp(\frac{it\partial_x^2}{2})$ is the Schrödinger group. Note that the operator J commuteswith the Schrödinger operator $i\partial_t + \frac{1}{2}\partial_x^2.$

2 Proof of theorem 1.1

The proof of Theorem 1.1 will be performed in the standard energy estimate.

Proof of Theorem 1.1. Let $v = e^{\mu t} u.$ Then v satisfies

$$\left\{ \begin{array}{l} i\partial_t v + \frac{1}{2}\partial_x^2 v = \lambda e^{-2\mu t} |v|^2 v, \\ v(0,x) = u_0(x). \end{array} \right\} \tag{2.1}$$

The assumption $\|u(t)\|_{L^\infty} = o(t^{-\frac{1}{2}}e^{-\mu t})$ means that $\|v(t)\|_{L^\infty} = o(t^{-\frac{1}{2}})$ as $t \to \infty$.

Let $U(t) = \exp(\frac{it\partial_x^2}{2})$ be the solution-operator of the linear Schrödinger equation. Then, from $\partial_t(U(-t)v(t)) = -i\lambda e^{-2\mu t}U(-t)(|v|^2 v)$, it follows that

$$L^2 - \lim_{t\to\infty} U(-t)v(t) = u_0 - i\lambda\int_0^\infty e^{-2\mu\tau}U(-\tau)(|v|^2 v)d\tau. \qquad (2.2)$$

We need to be nervous for the convergence of the integral in (2.2). Note that the integrand
is estimated like

$$\left\|U(-\tau)(|v|^2 v)\right\|_{L^2} = \left\||v|^2 v\right\|_{L^2} \le \|v\|_{L^\infty}^2 \|v\|_{L^2} \le \varepsilon t^{-1}\|v\|_{L^2} \qquad (2.3)$$

Once we can show that $\|v(t)\|_2$ is bounded, the integral of (2.2) is found to be convergent. To see the boundedness of $\|v(t)\|_{L^2}$, we make use of the differential inequality :

$$\frac{d}{dt}\|v\|_{L^2}^2 \le Ce^{-2\mu t}\|v\|_{L^\infty}^2\|v\|_{L^2}^2 \le \varepsilon e^{-2\mu t}t^{-1}\|v\|_{L^2}^2,$$

which is derived by (2.1). By Gronwall's inequality, we see that

$$\|v(t)\|_{L^2}^2 \le \|v(T)\|_{L^2}^2 \exp(\varepsilon\int_T^t e^{-2\mu t}\tau^{-1}d\tau) \le 2\|v(T)\|_{L^2}^2 \qquad (2.4)$$

for $t \in [T,\infty)$. Hence, plugging (2.3) and (2.4) into (2.2), we see that there exists
some $\varphi \in L^2$ such that $L^2 - \lim_{t\to\infty} U(-t)v(t) = \varphi$.
The φ also satisfies $\varphi \in L^1$. $\varphi \in L^1$ In fact, we have

$$\begin{aligned}
&\left\|U(-\tau)(|v|^2 v)\right\|_{L^2} \le C(\left\|U(-\tau)(|v|^2 v)\right\|_{L^2} + \left\|xU(-\tau)(|v|^2 v)\right\|_{L^2}) = \\
&= C(\left\||v|^2 v\right\|_{L^2} + \left\|J(|v|^2 v)\right\|_{L^2}) \le C\|v\|_{L^\infty}^2(\|v\|_{L^2} + \|Jv\|_{L^2}) \le \qquad (2.5)\\
&\le \varepsilon t^{-1}(\|v\|_{L^2} + \|Jv\|_{L^2}),
\end{aligned}$$

and, from differential inequality:

$$\frac{d}{dt}\|Jv\|_{L^2}^2 \le Ce^{-2\mu t}\|v\|_{L^\infty}^2\|Jv\|_{L^2}^2 \le \varepsilon e^{-2\mu t}t^{-1}\|Jv\|_{L^2}^2,$$

it follows that

$$\|Jv(t)\|_{L^2}^2 \le \|Jv(T)\|_{L^2}^2 \exp(\varepsilon\int_T^t e^{-2\mu t}\tau^{-1}d\tau) \le 2\|Jv(T)\|_{L^2}^2 \qquad (2.6)$$

for $t \in [T, \infty)$. Combining (2.5) and (2.6) with (2.4), we have the convergence of

$$L^1 - \lim_{t\to\infty} U(-t)v(t) = u_0 - i\lambda \int_0^\infty e^{-2\mu\tau} U(-\tau)(|v|^2 v)d\tau.$$

Hence $\varphi \in L^1$. Therefore, in L^∞, we have

$$U(t)\varphi - v(t) = i\lambda U(t)\int_t^\infty e^{-2\mu\tau} U(-\tau)(|v|^2 v)d\tau =$$

$$= O(t^{-\frac{1}{2}} \int_t^\infty e^{-2\mu\tau}\tau^{-1}d\tau) = O(t^{-\frac{3}{2}} e^{-2\mu t})$$

as $t \to \infty$. If $\varphi \neq 0$, then we have

$$U(t)\varphi = v(t) + O(t^{-\frac{3}{2}} e^{-2\mu t}). \tag{2.7}$$

Since $\|U(t)\varphi\|_{L^\infty} \sim (\pi t)^{-\frac{1}{2}} \left\|\hat{\varphi}\right\|_{L^\infty}$ where $\hat{\varphi}$ denotes the Fourier transform of φ, we find

that the identity (2.7) fails due to the assumption $\|v(t)\|_{L^\infty} = o(t^{-\frac{1}{2}})$.

If $\varphi = 0$, then we have $v(t) = -i\lambda U(t)\int_t^\infty e^{-2\mu\tau} U(-\tau)(|v|^2 v)d\tau$ in L^2. It follows that

$$\|v(t)\|_{L^2} \le C\int_t^\infty \begin{matrix} e^{-2\mu\tau}\|v(\tau)\|_{L^\infty}^2 \|v(\tau)\|_{L^2} \le \\ \le \varepsilon \sup \|v(\tau)\|_{L^2} \int_T^\infty e^{-2\mu\tau}\tau^{-1}d\tau. \end{matrix}$$
$$T<t<\infty$$

and hence

$$\sup_{T<t<\infty} \|v(\tau)\|_{L^2} \le \varepsilon \sup_{T<t<\infty} \|v(\tau)\|_{L^2} \int_T^\infty e^{-2\mu\tau}\tau^{-1}d\tau.$$

Then, for some $T > 0$, we see that $\sup_{T<t<\infty} \|v(\tau)\|_{L^2} = 0$. Solving (2.1) backward in

time with $v(T) = 0$ as initial data, we have $u_0 = 0$

3 Preliminary for the proof of theorem 1.2

We first consider the L^2-decay of $u(t)$. It will be applied to derive $u(T) = 0$ for

some large $T > 0$

Proposition 3.1.[L^2 -decay] *Assume the same assumptions as in Theorem* 1.2. *Then,*

for any $\sigma > 0$, *there exist some* $C_\sigma > 0$ *and* $T_\sigma > 0$ *such that*

$$\| u(t) \|_{L^2} = C_\sigma (\log t)^{-1/3+\sigma} \tag{3.1}$$

holds for $t \in [T_\sigma, \infty)$.

When we prove Proposition 3.1, the lemma below will be taken into account.

Lemma 3.2. *Assume the same assumptions as in Theorem* 1.2. *Then, for any* $\varepsilon > 0$, *there exist some* $C_\varepsilon > 0$ *and* $T_\varepsilon > 0$ *such that*

$$\| \partial_x u(t) \|_{L^2} + \| Ju(t) \|_{L^2} \le C_\varepsilon (\log t)^{\varepsilon}$$

holds for , $t \in [T_\varepsilon, \infty)$, *where* $J = x - it\partial_x$ (*the generator of Galilean transform*).

Proof of Lemma 3.2. For the rigorous proof, the technique of cut-off and mollification

is required. But we shall proceed in formal way. Multiply $\overline{\partial_x u}$ on both hand sides of

(1.1) after applying ∂_x. Then we have

$$\begin{aligned}
\partial_t \| \partial_x u(t) \|_{L^2}^2 &= 2\,\mathrm{Im}\left\{\lambda \int \partial_x (|\, u(t,x)\,|^2\, u(t,x))\, \overline{\partial_x u(t,x)}\, dx\right\} \\
&= 2\lambda_2 \int |\, u(t,x)\,|^2\, |\, \partial_x u(t,x)\,|^2\, dx + \mathrm{Im}\left\{\lambda \int u(t,x)^2\, (\overline{\partial_x u(t,x)})^2\, dx\right\} \\
&\le C \| u(t) \|_{L^\infty}^2 \| \partial_x u(t) \|_{L^2}^2 .
\end{aligned} \tag{3.2}$$

In virtue of (1.5), we see that, for any, $\varepsilon > 0$, there exists some $T_\varepsilon > 0$ such that

$$\partial_t \| \partial_x u(t) \|_{L^2}^2 \le 2\varepsilon\, t^{-1} (\log t)^{-1} \| \partial_x u(t) \|_{L^2}^2 . \tag{3.3}$$

holds for $t \in [T_\varepsilon, \infty)$. Applying Gronwall's inequality, we have

$$\| \partial_x u(t) \|_{L^2} \le (\log t)^{\varepsilon} (\log T_\varepsilon)^{-\varepsilon} \| \partial_x u(T_\varepsilon) \|_{L^2}$$

$\leq C_{\varepsilon}(\log t)^{\varepsilon}$.

The similar inequality holds for Ju by applying $J(|u|^2 u) = 2|u|^2 Ju - u^2 \overline{Ju}.$

Proof of Proposition 3.1. For u satisfying the assumption of Theorem 1.2, we have

$$\partial_t \| u(t) \|_{L^2}^2 = 2\lambda_2 \| u(t) \|_{L^4}^4 . \tag{3.4}$$

Applying Hölder's inequality: $\|u\|_{L^4}^4 \|u\|_{L^1}^2 \geq \|u\|_{L^2}^6$ to (3.4), we see that

$$\partial_t \| u(t) \|_{L^2}^2 \leq 2\lambda_2 \| u(t) \|_{L^2}^6 \| u(t) \|_{L^1}^{-2} . \tag{3.5}$$

The L^1-norm in (3.5) is estimated by (scale-invariant) Schwarz' inequality, i.e.,

$$\| u(t) \|_{L^1} \leq C \| u(t) \|_{L^2}^{1/2} \| xu(t) \|_{L^2}^{1/2}$$
$$\leq C \| u(t) \|_{L^2}^{1/2} \| Ju(t) + it\partial_x u(t) \|_{L^2}^{1/2},$$

where we used $x = J + it\partial_x$. Applying this estimate to (3.5), we see that

$$\partial_t \| u(t) \|_{L^2}^2 \leq -C \frac{\| u(t) \|_{L^2}^5}{\| Ju(t) \|_{L^2} + t \| \partial_x u(t) \|_{L^2}} .$$

By Lemma 3.2, it follows that, for $t \in [T_{\varepsilon}, \infty)$,

$$\partial_t \| u(t) \|_{L^2}^2 \leq -Ct^{-1}(\log t)^{-\varepsilon} \| u(t) \|_{L^2}^5 \tag{3.6}$$

Solving the differential inequality (3.6) with $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2})$, we have, for $t \in [T', \infty)$

with $T' > 0$ sufficiently large, $\| u(t) \|_{L^2} \leq -C(\log t)^{-1/3 + \varepsilon/3}$ .Taking $\sigma = \frac{\varepsilon}{3}$ and $T' = T_{\sigma,}$ we obtain Proposition 3.1.

4 Proof of theorem 1.2

We are now at the position to prove Theorem 1.2.

Proof of Theorem 1.2. For the solution u satisfying the assumption of Theorem 1.2, we have

$$\partial_t \| u(t) \|_{L^2}^2 = 2\lambda_2 \| u(t) \|_{L^4}^4 \geq 2\lambda_2 \| u(t) \|_{L^\infty}^2 \| u(t) \|_{L^2}^2 \quad (4.1)$$

By the decay-assumption (1.5), we see that, for any $\varepsilon > 0$,

$$\partial_t \| u(t) \|_{L^2}^2 \geq -2\varepsilon t^{-1} (\log t)^{-1} \| u(t) \|_{L^2}^2 \quad (4.2)$$

holds for $t > T$. By applying Gronwall's inequality to (4.2), we have,

$$(\log t)^{\varepsilon} \| u(t) \|_{L^2} \geq (\log T)^{\varepsilon} \| u(T) \|_{L^2} \quad (4.3)$$

We here apply Proposition 3.1 to the right hand side of (4.3). Then we see that, for sufficiently large $T > 0$,

$$C_\sigma (\log t)^{-(1/3)+\sigma+\varepsilon} \geq (\log T)^{\varepsilon} \| u(T) \|_{L^2} . \quad (4.4)$$

Take $\varepsilon > 0$ and $\sigma > 0$ sufficiently small so that the left hand side of (4.4) tends to 0

as $t \to \infty$. Then we see that $u(T) = 0$. Solving (1.1) backward in time, we see that $u_0 = 0$ The proof of Theorem 1.2 is complete.

References

1. G. P. Agrawal, *Nonlinear fiber optics*, Academic Press, Inc. (1995).

2. G. P. Agrawal, Effect of two-photon absorption on the amplification of ultrashort optical pulses, Phys. Rev. E, 48(1993), 2316-2318.

3. J. Barab, *Nonexistence of asymptotically free solutions for a nonlinear Schrödinger equation*, J. Math. Phy., 25(1984), 3270-3273.

4. N. Kita and A. Shimomura, *Large time behavior of solutions to Schrödinger equations with a dissipative nonlinearity for arbitrarily large initial data*, J. Math. Soc. Japan, 61(2009), 39-64.

5. A. Shimomura, *Asymptotic behavior of solutions to Schrödinger equations with dissipative nonlinearities*, Comm. Partial Differential Equations, 31(2006), 1407-142.

EXACT SOLUTIONS OF TIME FRACTIONAL LINEAR DIFFUSION-WAVE EQUATIONS[1]

© Khongorzul Dorjgotov
Institute of Mathematics
National University of Mongolia, Mongolia

© Hiroyuki Ochiai
Institute of Mathematics for Industry
Kyushu University, Japan

© Uuganbayar Zunderiva
Department of Mathematics
National University of Mongolia, Mongolia

We study a class of time fractional diffusion-wave equations with variable coefficient using Lie symmetry analysis. We obtain a complete group classification and a classification of group invariant solutions of this class of equations. The reduced equations corresponding to the optimal systems of Lie algebras of infinitesimal symmetries are also obtained. Group invariant solutions are found explicitly using our complementary work to this work. The invariant solutions are expressed in means of special functions.

1 Introduction

In recent years, the application of fractional differentiation for the mathematical modeling of physical problems has been on rise due to the fact that the fractional derivatives provide excellent instruments for description of memory and hereditary properties of various materials and processes [1]. Especially, anomalous diffusion processes of complex systems, from charge transport in amorphous semiconductors to bacterial motions, are modeled successfully by fractional diffusion wave equations [2].

Our objective is to study the class of time fractional diffusion-wave equations of the following form:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u(x,t)=c^2(x)\frac{\partial^2}{\partial x^2}u(x,t) \tag{1}$$

where α is a positive non-integer number and $c(x)$ is a sufficiently differentiable, non-zero function. Here, fractional differentiation is defined in the Riemann-Liouville manner:

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha}u(x,t):=\begin{cases}\dfrac{\partial^n u}{\partial t^n}, & \text{for } \alpha=n\in\mathbb{N},\\ \dfrac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\dfrac{\partial^n}{\partial t^n}\displaystyle\int_0^t\frac{u(x,\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}}d\tau, & \text{for } \alpha\in(n\text{-}1,n), \text{ with } n\in\mathbb{N}.\end{cases} \tag{2}$$

[1] This work was supported by JSPS (KAKENHI Grant No. 15H03613) and by the Asia Research Center (Grant No. P2018-3589).

The particular case of the equation (1) with constant diffusion coefficient

$$\frac{\partial^{\alpha}}{\partial t^{\alpha}}u(x,t)=cu_{xx} \tag{3}$$

has been studied extensively. For example, in [9,10], using the method of Mellin integral transform, the solutions of (3) with initial conditions was expressed by Fox- H functions and analyzed for $0\le\alpha\le 2$ Also, in the sequential works of F. Mainardi et al. [3-6], the fundamental solutions of Cauchy and boundary value problems of (3) in means of Riemann-Liouville and Caputo fractional derivative were obtained using the method of Laplace transform and in [7], the invariance of the equation (3) was studied and scale-invariant solutions were found by generalized Wright functions for $\alpha>2$.

But to the best of our knowledge, see the references, the invariant solutions of the equation (1) have not been studied for the case of non-constant diffusion coefficient. The equation (1) interpolates from heat equation to wave equation with variable coefficient when the order of the fractional derivative α varies from 1 to 2. The complete group classification and some invariant solutions of the variable coefficient wave equation, which corresponds to (1) for $\alpha=2$ are found using Lie symmetry methods in G. W. Bluman et al. [8].

2 Special functions

We express solutions of (1) in terms of Mittag-Leffler functions, generalized Wright functions and Fox $H-$ functions, which are defined as follows:

1. Mittag-Leffler function:

   $E,\beta(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^{i}}{\Gamma(i+\beta)}$ is defined for $z\in\mathbb{C},$ and parameters $\in\mathbb{R}_{+}$ and $\beta\in\mathbb{C}$ [11].

2. Wright functions:

   $\Psi(z;,\beta)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^{i}}{i!\Gamma(\alpha i+\beta)}$ is an entire function for $z\in\mathbb{C},$ a real parameter satisfying $\alpha>-1$ and $\beta\in\mathbb{C}$ [14].

3. Generalized Wright function:

   ${}_{p}\Psi_{q}\left[z\left|\begin{matrix}(A_{i},{}_{i})_{1,p}\\(B_{j},\beta_{j})_{1,q}\end{matrix}\right.\right]=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\prod_{i=1}^{p}\Gamma(A_{i}+{}_{i}k)}{\prod_{j=1}^{q}\Gamma(B_{j}+\beta_{j}k)}\frac{z^{k}}{k!}$, is defined for $z\in\mathbb{C},p,q\in\mathbb{N}_{0}=\{0,1,2,...\},A_{i},B_{j}\in\mathbb{C}$ and $\alpha_{i},\beta_{j}\in\mathbb{R}\{0\}$ (here $i=1,...,p;j=1,...,q$). The generalized Wright function is absolutely

convergent, thus is an entire function for $\Delta = \sum_{j=1}^{q} B_j - \sum_{i=1}^{p} A_i > -1$. When $\Delta = -1$, it is absolutely convergent for $|z| < \delta$ where $\delta = \prod_{i=1}^{p} \alpha_i^{-\alpha_i} \prod_{j=1}^{q} \beta_j^{\beta_j}$, or for $|z| = \delta$ and $Re(v) > \frac{1}{2}$, where $v = \sum_{j=1}^{q} b_j - \sum_{i=1}^{p} \alpha_i + \frac{p-q}{2}$ [12].

4. Fox $H-$ functions:

$$H_{p,q}^{m,l}\left[z \middle| \begin{matrix} (A_i, \alpha_i)_{1,p} \\ (B_j, \beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right] = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(B_j - \beta_j s) \prod_{i=1}^{l} \Gamma(1 - A_i + \alpha_i s)}{\prod_{i=l+1}^{p} \Gamma(A_i - \alpha_i s) \prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1 - B_j + \beta_j s)} z^s ds,$$ is

defined for $z \in \mathbb{C} / \{0\}$, parameters $m, l, p, q \in \mathbb{N}_0$ with $(m, l) \neq (0,0), \alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}_+$ and $A_i, B_j \in \mathbb{R}$ here $(i = 1,...,p; j = 1,...,q)$. If there occurs any empty product, then it is taken to be 1. L is a suitable contour separating the poles of $\Gamma(B_j - \beta_j s)$ (here $j = 1,...,m$) from the poles of $\Gamma(1 - A_i + \alpha_i s)$ $(i = 1,...,l)$. In this work, we take the contour L as $L_{\gamma + i^{\infty}}$, a contour starting at the point $\gamma - i^{\infty}$ and $\gamma + i^{\infty}$, where γ is an appropriately chosen real number, separating the poles of Gamma functions in the numerator of the fraction inside the integral. The integral converges under the condition [15]

$v = \sum_{i=1}^{l} i - \sum_{i=l+1}^{p} i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j - \sum_{j=m+1}^{q} \beta_j > 0$ and $|\arg z| < \frac{\pi v}{2}$.

3 Main results

With the above preparation, we tabulate our main results in Table 1. The exact solutions were obtained with the help of the Propositions 3.1 and 3.2 of [13].

Table 1

The invariant solutions of $u_{t^\alpha} = c^2(x)u_{xx}$

$c(x)$	α	Invariant solutions $u(x,t)$
1	$0<\alpha<2$	$u(x,t) = c_1 t^{\frac{s\alpha}{2}} \Psi(-xt^{-\frac{\alpha}{2}}; -\frac{\alpha}{2}, 1+\frac{s\alpha}{2})$
	$\alpha>2$	$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{s-2+\frac{2k}{\alpha}} t^{\alpha-k} {}_2\Psi_1 \cdot$ $\cdot \left[x^{-2}t^{\alpha} \middle\vert \begin{matrix} (2-\frac{2k}{\alpha}-s,2),(1,1) \\ (1+\alpha-k;\alpha) \end{matrix} \right]$
	$\alpha \in \mathbb{R}$	$u(x,t) = e^{\pm x} \sum_{k=1}^{n} c_k t^{\alpha-k} E_{\alpha,1+\alpha-k}(t^\alpha)$
	$\alpha \in \mathbb{R}$	$u(x,t) = \varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k t^{\alpha-k}$
x^2	$0<\alpha<2$	$u(x,t) = c_1 x t^{\frac{\alpha}{2}(1-s)} \Psi(-x^{-1}t^{-\frac{\alpha}{2}}; -\frac{\alpha}{2}, 1+\frac{\alpha}{2}(1-s))$
	$\alpha>2$	$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{s+2-\frac{2k}{\alpha}} t^{\alpha-k} {}_2\Psi_1 \cdot$ $\cdot \left[x^2 t^{\alpha} \middle\vert (1-\frac{2k}{\alpha}+s,2),(1,1)(1+\alpha-k,\alpha) \right]$
	$\alpha \in \mathbb{R}$	$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x e^{\pm\frac{1}{x}} t^{\alpha-k} E_{\alpha,1+\alpha-k}(t^\alpha)$
	$\alpha \in \mathbb{R}$	$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x t^{\alpha-k}$
x	$\alpha \in \mathbb{R}$	$u(x,t) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^s t^{\alpha-k} E_{\alpha,1+\alpha-k}(s(s-1)t^\alpha)$
x^m	$0<\alpha<2$	$u(x,t) = c_1 x^s H_{1,2}^{2,0} \cdot$ $\cdot \left[\frac{x^{2(1-m)}}{4(m-1)^2 t^\alpha} \middle\vert \begin{matrix} (1,\alpha) \\ \left(\frac{s}{2(m-1)},1\right), \left(\frac{s-1}{2(m-1)},1\right) \end{matrix} \right]$
	$\alpha>2$	$u(x,t) = x^{s+2(m-1)} t^\alpha \sum_{k=1}^{n} c_k \left(x^{\frac{2(1-m)}{\alpha}} t^{-1} \right)^k \times$ $\times {}_3\Psi_1 \left[4(m-1)^2 x^{2(m-1)} t^\alpha \middle\vert \begin{matrix} \left(1-\frac{k}{\alpha}+\frac{s}{2(m-1)},1\right),(1,1) \\ (1+\alpha-k,\alpha) \end{matrix} \right]$

$e^{-\frac{x}{2}}$	$0<\alpha<2$	$u(x,t)=c_1 e^{sx} H_{1,2}^{2,0}\left[\left.\frac{e^x}{t^\alpha}\right\vert\begin{matrix}(1,\alpha)\\(-s,1),(-s,1)\end{matrix}\right]$
	$\alpha>2$	$u(x,t)=e^{(s-1)x}t^\alpha\sum_{k=1}^{n}c_k\left(\frac{e^{\frac{x}{\alpha}}}{t}\right)^k {}_3\Psi_1\cdot$ $\cdot\left[\left.\frac{t^\alpha}{e^x}\right\vert\begin{matrix}(1-\frac{k}{\alpha}-s,1),(1-\frac{k}{\alpha}-s,1),(1,1)\\(1+\alpha-k,\alpha)\end{matrix}\right]$
x^2+1	$\alpha\in\mathbb{R}$	$u(x,t)=\sqrt{x^2+1}e^{s\arctan x}t^\alpha\sum_{k=1}^{n}c_k\frac{1}{t^k}E_{\alpha,1+\alpha-k}((s^2+1)t^\alpha)$
$\frac{(1-x)^{m+1}}{(1+x)^{m-1}}$	$0<\alpha<2$	$u(x,t)=c_1\sqrt{1-x^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^s H_{1,2}^{2,0}\cdot$ $\cdot\left[\frac{1}{16m^2}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{2m}\frac{1}{t^\alpha}\left\vert\begin{matrix}(1,\alpha)\\\left(\frac{2s+1}{4m},1\right),\left(\frac{2s-1}{4m},1\right)\end{matrix}\right.\right]$
	$\alpha>2$	$u(x,t)=\sqrt{1-x^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{s+2m}t^\alpha\sum_{k=1}^{n}c_k\left(\frac{1}{t}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{2m}{\alpha}}\right)^k\times$ $\times{}_3\Psi_1\cdot\left[\begin{matrix}16m^2t^\alpha\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{2m}\cdot\\\cdot\left\vert\begin{matrix}\left(1-\frac{k}{\alpha}+\frac{2s+1}{4m},1\right),\left(1-\frac{k}{\alpha}+\frac{2s-1}{4m},1\right),(1,1)\\(1+\alpha-k,\alpha)\end{matrix}\right.\end{matrix}\right.$
$1-x^2$	$\alpha\in\mathbb{R}$	$u(x,t)=\sqrt{1-x^2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^s t^\alpha\sum_{k=1}^{n}\frac{c_k}{t^k}E_{\alpha,1+\alpha-k}((4s^2-1)t^\alpha)$

References

1. Podlubny, I. *"Fractional Differential Equations. Mathematics in Science and Engineering"*, vol. 198, Academic Press, San Diego (1999).
2. Metzler R., Klafter J.: *"The random walk's guide to anomalous diffusion: A Fractional dynamics approach"* Phys. Rep. **339**, 1-77 (2000).
3. Mainardi F.: *"The fundamental solutions for the fractional diffusion-wave equation"* Appl. Math. Lett. **9**, No. 6, 23-28 (1996).
4. Mainardi F., Pagnini G.: *"The Wright functions as solutions of the time-fractional diffusion equation"* Appl. Math. Comput. **141**, 51-62 (2003).
5. Mainardi F., Mura A., Pagnini G.: *"The M-Wright function in time-fractional diffusion processes: a tutorial survey"* Int. J. Differ. Equ., Art. ID 104505, pp. 29 (2010).
6. Mainardi F., Pagnini G.: *"The role of Fox-Wright functions in fractional sub-diffusion of distributed order"* J. Comput. Appl. Math. **207**, 245-257 (2007).
7. Buckwar E., Luchko Yu.: *"Invariance of a partial differential equation of a fractional order under the Lie group of scaling transformations"* J. Math. Anal. Appl. **227**, 81-97 (1998).
8. Bluman G., Kumei S.: *"On invariance properties of the wave equation"* J. Math. Phys. **28**, No. 2, 307-318 (1987).
9. Schneider W. R., Wyss W.: *"Fractional diffusion and wave equations"* J. Math. Phys. **30**, No. 1, 134-144 (1989).
10. Wyss W.: *"The fractional diffusion equation"* J. Math. Phys. **27**, no. 11, 2782-2785 (1986).
11. Cherniha R., Serov M., Rassokha I.:*"Lie symmetries and form preserving transformations of reaction-diffusion-convection equations"* J. Math. Anal. Appl. **342**, 1363-1379 (2008).
12. Kilbas, A.A.: *"Fractional calculus of the generalized Wright function"*, Fract. Calc. Appl. Anal., Vol. 8, **2** (2005) 113-126.
13. Dorjgotov, K., Ochiai, H., Zunderiya, U.: *"On solutions to fractional order linear differential equations and systems"* (in preparation).
14. Ames W.F., Lohner R.J., Adams E.: *"Group properties of* $u_{tt} = [F(u)u_x]x$ *"*, Int. J. Non-linear Mech., 1981; 16:439.
15. Mathai, A.M., Saxena, R.K., Haubold, H.J.: *"The* $H-$*function, Theory and Applications"*, Springer (2010).

LINEAR TIME FRACTIONAL TELEGRAPH EQUATIONS AND THEIR EXPLICIT SOLUTIONS[1]

© Khongorzul Dorjgotov
Institute of Mathematics
National University of Mongolia, Mongolia

© Bayarpurev Mongol
Department of Electronics and Communication Engineering
National University of Mongolia, Mongolia

© Uuganbayar Zunderiva
Department of Mathematics
National University of Mongolia, Mongolia

We study a class of linear evolution systems of time fractional partial differential equations. Also we express solutions in terms of Mittag-Leffler functions, generalized Wright functions and Fox H-functions.

Introduction

Classical telegraph equations have been introduced by Oliver Heavyside back in 1880s, to describe behavior of an electromagnetic wave in a transmission line. The unknown functions of this partial differential equations (PDE) are the voltage and the current along the transmission line and the coefficients are the transmission line parameters, namely, resistance, inductance and capacitance. The telegraph equations are the utmost important equations in electronics industry, specially in designing of high-frequency electronic circuits.

In this talk, we consider the class of time fractional linear systems of the following form:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} = \upsilon_x, \\ \dfrac{\partial^\alpha \upsilon}{\partial t^\alpha} = f(x)u_x + g(x)u, \end{cases}$$

where α is a positive non-integer number, *g(x)* is sufficiently differentiable function and *f(x)* is a non-constant, sufficiently differentiable function. Here, fractional differentiation is defined in the Riemann-Liouville manner:

[1] This work was supported by JSPS (KAKENHI Grant No. 15H03613) and by the Asia Research Center (Grant No. P2018-3589).

$$\frac{\partial^{\alpha}u(x,t)}{\partial t^{\alpha}} := \begin{cases} \dfrac{\partial^{n}u}{\partial t^{n}}, \text{ for } \alpha \in \mathbb{N} \\ \dfrac{1}{\Gamma(n-a)}\dfrac{\partial^{n}}{\partial t^{n}}\displaystyle\int_{0}^{t}\frac{u(x,s)}{(t-s)^{\alpha-n+1}}ds, \text{ for } \alpha \in (n-1,n), \text{ with } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Explicit Invariant Solutions of (1) PDE

We express solutions in terms of Mittag-Leffler functions, generalized Wright functions and Fox H-functions.

Solution to the PDE (1) with any f(x) and $g(x) = \dfrac{\lambda_2 f^{\frac{1}{2}}}{\left(\lambda_1 + \int f^{\frac{1}{2}}dx\right)} + \dfrac{f_x}{2}$.

1. If $0 < \alpha < 1,$ then for any $\alpha, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u(x,t) = cf^{\frac{1}{2}}(x) \qquad \left(\lambda_1 + \int f^{\frac{1}{2}}dx\right)^{\alpha} \varphi\left(\left(\lambda_1 + \int f^{\frac{1}{2}}dx\right)^{-\frac{1}{\alpha}} t\right) \\ \upsilon(x,t) = c \qquad\qquad \left(\lambda_1 + \int f^{-\frac{1}{2}}dx\right)^{\alpha} \psi\left(\left(\lambda_1 + \int f^{-\frac{1}{2}}dx\right)^{\frac{1}{\alpha}} t\right). \end{cases}$$

Here,

$$\varphi(z) = H_{1,2}^{2,0}\left(\frac{z^{-2\alpha}}{4}\middle| \begin{matrix} (1,2\alpha) \\ \left(\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{2},1\right),\left(\frac{\alpha+\lambda_2}{2},1\right) \end{matrix}\right), \text{ for } z > 0,$$

$$\psi(z) = H_{1,2}^{2,0}\left(\frac{z^{-2\alpha}}{4}\middle| \begin{matrix} (1,2\alpha) \\ \left(\frac{\alpha}{2},1\right),\left(\frac{\alpha+\lambda_2}{2}+\frac{1}{2},1\right) \end{matrix}\right), \text{ for } z > 0;$$

2. If $\alpha \geq 1,$ then for any $\alpha, c \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} u(x,t) = cf^{\frac{1}{2}}(x) & \left(\lambda_1 + \int f^{-\frac{1}{2}}dx\right)^{\alpha} \varphi\left(\left(\lambda_1 + \int f^{-\frac{1}{2}}dx\right)^{-\frac{1}{\alpha}} t\right) \\ \upsilon(x,t) = c & \left(\lambda_1 + \int f^{-\frac{1}{2}}dx\right)^{\alpha} \psi\left(\left(\lambda_1 + \int f^{-\frac{1}{2}}dx\right)^{-\frac{1}{\alpha}} t\right). \end{cases}$$

Here, $\forall \alpha, c \in \mathbb{R}$ and

$$\varphi(z) = \sum_{k=1}^{n} c_{k,1} z_3^{\alpha-k} \Psi_1\left(4z^2 \left| \begin{matrix} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{k}{2} + 1, 1\right), \left(\frac{\alpha+\lambda_2}{2} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}, 1\right), (1,1) \\ (1+-k, 2\alpha) \end{matrix} \right.\right) +$$

$$2\sum_{k=1}^{n} c_{k,2} z_3^{2\alpha-k} \Psi_1\left(4z^2 \left| \begin{matrix} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{k}{2} + \frac{3}{2}, 1\right), \left(\frac{\alpha+\lambda_2}{2} - \frac{k}{2} + 1, 1\right), (1,1) \\ (1+2-k, 2\alpha) \end{matrix} \right.\right)$$

$$\psi(z) = 2\sum_{k=1}^{n} c_{k,1} z_3^{2\alpha-k} \Psi_1\left(4z^2 \left| \begin{matrix} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{k}{2} + 1, 1\right), \left(\frac{\alpha+\lambda_2}{2} - \frac{k}{2} + \frac{3}{2}, 1\right), (1,1) \\ (1+2-k, 2\alpha) \end{matrix} \right.\right) +$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_{k,2} z_3^{\alpha-k} \Psi_1\left(4z^2 \left| \begin{matrix} \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{k}{2} + \frac{1}{2}, 1\right), \left(\frac{\alpha+\lambda_2}{2} - \frac{k}{2} + 1, 1\right), (1,1) \\ (1+-k, 2\alpha) \end{matrix} \right.\right)$$

where $n \in \mathbb{N}$ satisfies $0 \le n-1 < \alpha \le n$, and $c, c_{k,1}, c_{k,2} (k = 1, \ldots, n)$ are constants.

Solution to the PDE (1) for any f(x) and $g(x) = \lambda_2 f^{\frac{1}{2}} + \frac{f_x}{2}$

Using Mittag-Leffler functions, for any $\alpha > 0$ we explicitly express them as:

$$\begin{cases} u(x,t) = f^{-\frac{1}{2}} \exp\left(\alpha \int f^{-\frac{1}{2}}dx\right)\varphi(t), \\ \upsilon(x,t) = \exp\left(\alpha \int f^{-\frac{1}{2}}dx\right)\varphi(t). \end{cases}$$

Here, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ and

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_{k,1} t^{\alpha-k} \mathrm{E}_{2\alpha,1+-k}(\alpha(\alpha+\lambda_2)t^{2\alpha}) +$$

$$\alpha \sum_{k=1}^{n} c_{k,2} t^{2\alpha-k} \mathrm{E}_{2\alpha,1+2-k}(\alpha(\alpha+\lambda_2)t^{2\alpha})$$

$$\psi(t) = (\alpha+\lambda_2) \sum_{k=1}^{n} c_{k,1} t^{2\alpha-k} \mathrm{E}_{2\alpha,1+2-k}(\alpha(\alpha+\lambda_2)t^{2\alpha}) +$$

$$\sum_{k=1}^{n} c_{k,2} t^{\alpha-k} \mathrm{E}_{2\alpha,1+-k}(\alpha(\alpha+\lambda_2)t^{2\alpha}),$$

Where $n \in \mathbb{N}$ satisfies $0 \le n-1 < \alpha \le n$, and $c_{k,1}, c_{k,2} (k = 1, \ldots, n)$, are constants.

Solution to the PDE (1) with any f(x) and $g(x) = \dfrac{f_x}{2}$

Using Wright functions and generalized Wright functions, we explicitly express them as:

1. Assume $0 < \alpha \le 1$ then

$$u(x,t) = cf^{-\frac{1}{2}}(x) \left[\int f^{-\frac{1}{2}} dx \right]^{\alpha_1+\alpha_2} \varphi\left(t \left[\int f^{-\frac{1}{2}} dx \right]^{-\frac{1}{\alpha}} \right),$$

$$\upsilon(x,t) = c \left[\int f^{-\frac{1}{2}} dx \right]^{\alpha_1+\alpha_2} \psi\left(t \left[\int f^{-\frac{1}{2}} dx \right]^{-\frac{1}{\alpha}} \right).$$

Here, $\alpha_1, \alpha_2, c \in \mathbb{R}$ and

$$\varphi(z) = z^{(\alpha_2+\alpha_1)\alpha} \Psi(z^{-\alpha}; -\alpha, 1+(\alpha_2+\alpha_1)\alpha), z > 0,$$

where $n \in \mathbb{N}$ satisfies $0 \le n-1 < \alpha \le n$, and $c_k (k = 1, \ldots, n)$ are arbitrary real numbers.

2. Assume $1 \le \alpha$ then

$$u(x,t) = cf^{-\frac{1}{2}}(x)\left[\int f^{-\frac{1}{2}}dx\right]^{\alpha_1-\alpha_2}\psi\left(t\left[\int f^{-\frac{1}{2}}dx\right]^{-\frac{1}{\alpha}}\right),$$

$$\upsilon(x,t) = -c\left[\int f^{-\frac{1}{2}}dx\right]^{\alpha_1-\alpha_2}\psi\left(t\left[\int f^{-\frac{1}{2}}dx\right]^{-\frac{1}{\alpha}}\right).$$

Here, $\alpha_1, \alpha_2, c \in \mathbb{R}$ and

$$\psi(z) = \sum_{k=1}^{n} c_k z_2^{\alpha-k}\Psi_1\left(z^{\alpha}\left|\begin{matrix}\left(\alpha_2-\alpha_1-\frac{k}{\alpha}+1,1\right),(1,1)\\(1+\alpha-k,\alpha)\end{matrix}\right.\right),$$

where $n \in \mathbb{N}$ satisfies $0 \le n-1 < \alpha \le n$, and $c_k (k = 1,\ldots,n)$ are arbitrary real numbers.

Secondly, Using Mittag-Leffler functions, we explicitly give another solution for any $\alpha > 0$ as:

$$\begin{cases} u = f^{-\frac{1}{2}}\exp\left[(\alpha_1+\alpha_2)\int f^{-\frac{1}{2}}dx\right]\varphi(t) + f^{-\frac{1}{2}}\exp\left[(\alpha_1-\alpha_2)\int f^{-\frac{1}{2}}dx\right]\psi(t) \\ \upsilon(t) = \exp\left[(\alpha_1+\alpha_2)\int f^{-\frac{1}{2}}dx\right]\varphi(t) - \exp\left[(\alpha_1-\alpha_2)\int f^{-\frac{1}{2}}dx\right]\psi(t) \end{cases}$$

Here, $(\alpha_1,\alpha_2) \in \left\{(\pm 1,\alpha),(0,\pm 1),(0,0)\middle|\alpha \in \mathbb{R}\right\}$,

$$\varphi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k z^{\alpha-k}\mathrm{E}_{\alpha,1+\alpha-k}((\alpha_2+\alpha_1)z^{\alpha}),$$

$$\psi(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k z^{\alpha-k}\mathrm{E}_{\alpha,1+\alpha-k}((\alpha_2-\alpha_1)z^{\alpha}).$$

where $n \in \mathbb{N}$ satisfies $0 \le n-1 < \alpha \le n$, and $c_k (k = 1,\ldots,n)$ are arbitrary real numbers.

A BRIEF OVERVIEW OF THE HISTORY OF VIETNAMES MATHEMATICS AND THE HISTORY OF TEACHING MATHEMATICS IN VIETNAM

© Doan Thi Le
Tsinghua University
Taiwan

© Ta Duy Phuong
Institute of Mathematics
Hanoi

© Alexei Volkov
Tsinghua University
Taiwan

This report briefly presents the history of Vietnames mathematics and the history of teaching mathematics in Vietnam. The report consists of 3 parts:

I. The history of mathematics in traditional Vietnam.

II. Vietnames mathematics and mathematical education in Vietnam during the French colonial period.

III. Vietnames mathematics and mathematical education in Vietnam from 1945 to the present.

I. The history of mathematics in traditional Vietnam

The historical researcher Ta Ngoc Lien wrote about ancient Vietnames mathematics as follows (see [1]): *Today, based on archaeological documents, historical studies, and a review of the remaining ancient buildings... the ancient Vietnamese had to be well versed in mathematics, and the Vietnamese skillfully applied mathematics to life ... Finding secret codes in forms engraved on the surface of a Dong Son drum on Dao Thinh cans ... will find her knowledge of astronomy and mathematics of the ancient Vietnamese*.

The northern part of modern Vietnam formally became a province of the Han Empire (China) in the 2nd century BC. At this time, local authorities used Chinese letters for official documentation and state exams.

Vietnam gained independence from China in the 10th century. Since then, the Vietnamese have created their own administration system, mainly by the Chinese system. Chinese books have been the main books for teaching. Buddhism also played an important role in Vietnamese education.

Quoc tu giam - the first university in Vietnam was founded in 1075. The first national exam was held in 1076. After national exams were usually conducted about every 3 years. Successful candidates for these exams were often appointed to high positions in government bureaucracy.

Math exams in Vietnam in the feudal period:

To select candidates who know how to use mathematics in the public administration system (those who know how to calculate tax, how to make a calendar, how to calculate the area of fields, ...), starting from 1077, the Vietnamese feudal authorities organized mathematics exams. According to historical documents, mathematical exams were held in 1077, 1179, 1261, 1363, 1373,

1393, 1404 (1405?), 1437, 1472, 1475, 1477, 1481, 1482, 1486, 1490. 1505, 1698 , 1711, 1725, 1732, 1747, 1762, 1767, 1777.

Vietnamese math books in the medieval period:

Mathematical books appeared according by demand to prepare for mathematical exams (in the feudal and early French colonial period). Books in mathematics were also necessary for land surveyors, engineers, astronomers, officials from various departments, etc. Some scientists (Luong The Vinh, Nguyen Huu Than, ...) considered mathematics as the object of scientific study, they wrote mathematical books on the basis of their mathematical research.

The number of ancient Vietnamese books on mathematics (was written from the 15th century to the beginning of the 20th century), known so far, is 22 books, of which 13 was written only in Chinese letters (Han letters) and 9 books in mixed Han letters (Chinese letters) and Nôm letters (ancient Vietnamese letters). Later we collectively call these 22 books as *Han-Nôm math books*.

The content of Han-Nôm math books:

Arithmetic and algebra: System base 10; Arithmetic calculation: addition, subtraction, multiplication, division, using a calculator. Equally or proportional division, math problems about motion, the method of finding the square root, solving systems of two or three equations of the first order, ...

Geometry: area and volume of figures (volume of prism, cone, cylinder, ...), applied to measurements of fields, to digging rivers and embanking dikes), etc., ...

In some books: Calculation of sum (type of Pascal's triangle, ...: Nguyen Huu Than, Pham Gia Ky); quadratic equations and cubic equations, the method of finding the cubic root (Nguyen Huu Than, Pham Gia Ky); Indeterminate equation (Luong The Vinh, Nguyen Huu Than, ...); Chinese remainder theorem (Luong The Vinh, Nguyen Huu Than); magic squares (Nguyen Huu Than), using the Pythagorean theorem in practical problems (Nguyen Huu Than, Nguyen Can), Heron's formula for calculating the area of triangle (Nguyen Huu Than), congruent triangles (Luong The Vinh, Nguyen Huu Than, Nguyen Can).

Characteristics of the Han-Nôm Mathematical Books:

Chinese and Han-Nom ancient mathematics books had the same characteristics: mathematical problems are taken from real life; Problems and solutions are formulated in words (without using formulas, therefore it is difficult to read and understand)... Although Han-Nom mathematics books were written mainly under strong influence from Chinese books and the Vietnamese studied mathematics by Chinese old mathematics books, but Han-Nôm mathematics books had their own characteristics: many mathematics problems and rules are formulated in the form of the poem, in Nôm (ancient Vietnamese language), therefore it is easier to understand, easier to remember, easier to use for Vietnamese people; In some books there was a generalization of mathematics results; ...

Unlike China, in Vietnam there were no classes, no teachers for teaching mathematics. Vietnamese either self-taught mathematics, or teachers taught mathematics together with literature, or in the family the father (grandfather) taught mathematics to his children (grandchildren).

For more information about Han-Nom math books, see [2], [3].

II Mathematics and Mathematical Education in Vietnam during the French colonial period

Mathematics and mathematical education in Vietnam until the beginning of the XIX century

Based on Latin letters, Western missionaries created Vietnamese letters, in accordance with the Vietnamese pronunciation, so Vietnamese letters are gradually accepted by Vietnamese as the official language. Since 1864, the French have opened schools for the training of translators and mandarins, mathematics began to be taught in Vietnamese. The first two mathematical books appeared in Vietnamese in this time. But during this time and until 1945, the Vietnamese studied mathematics mainly from French books. Influenced by French math books, some Han-Nom math books included some new techniques, new rules and new formulations of problems and solutions.

Mathematics and Mathematics Education in Vietnam from 1900 to 1945

To eliminate the influence of Chinese culture, the French carried out an education reform in 1906-1919. As a result, examinations in the Chinese system (examinations in the Chinese language and by Chinese books) ended in 1919. Vietnamese has become dominant in literature, in life, and in science. The French-Vietnamese school system, including mathematics in the curriculum, was established throughout Viet Nam. Vietnames studied mathematics mainly by French math books. But in this times several mathematics books on Vietnamese have been published.

Since 1906, the French have organized a number of universities and colleges in Vietnam.

Since 1930, some talented young students were sent to study mathematics in France (Hoang Xuan Han: École polytechnique, 1930, University of Sorbonne, 1936; Ta Quang Buu: Louis le Grand School, Henri Poincaré Institute, Paris University, Bordeaux University, 1929-1934; Nguyen Xien-Toulouse University, 1927-1932; Nguyen Thuc Hao-Marseille University 1929-1933, Le Van Thiem- École Normale Supérieure, 1939-1943). After returning home, they became the first professors in mathematics at French institutes or at institutes created by the Democratic Republic Vietnam in the 1950s.

Hoang Xuan Han became the great scholar of Vietnam. He studied not only mathematics, but astronomy and the calendar, as well as history and literature. Hoang Xuan Han with some colleagues founded magazine *Sciences* in Vietnamese. He has compiled a Vietnamese dictionary of science. He has written many popular mathematical articles. Hoang Xuan Han was the Minister of Education of the Tran Trong Kim's government of and was the author of a new program in Vietnamese educations (in 1945).

After the August Revolution (1945), Nguyen Thuc Hao was appointed General Secretary and Director of the Hanoi University of Science, the first university in the Democratic Republic Vietnam. Later Nguyen Thuc Hao was a long time rector of the Vinh Pedagogical Institute (1959-1974).

Ta Quang Buu, Nguyen Xien was members of the government of the Democratic Republic Vietnam.

III Vietnamese mathematics and mathematics education from 1945 to the present

Vietnamese mathematics and mathematical education from 1945 to 1954

From December 19, 1946, a little over a year after the declaration of independence, Vietnam began a war of resistance against the French colonialists. In December 1946, Nguyen Thuc Hao created a university-level math class at Nghe An province. Although Nguyen Thuc Hao University was small in size, it was not small in importance. The first students of this class of mathematics later became the leading scientists of Vietnam. The mathematics class Nguyen Thuc Hao marked the beginning of the history of higher education in Vietnam after the colonial period.

The great influence in the development of mathematics and mathematics education in Vietnam was the return of Le Van Thiem from France.

In 1939, Le Van Thiem went to France to study at the école Normale Supérieure. In 1942, under the leadership of George Valiron, Le Van Thiem began his research on the theory of the distribution of values of meromorphic functions (Nevanlinna Theory). It was during this period that he made an important contribution to solving the inverse problem of the Nevanlinna theory, which formed the core of his doctoral dissertation (1945, Göttingen) and Doctor d'Etat (1949, Paris) and placed him among the best young researchers in this field (see [4]).

At that time, Le Van Thiem was an idol for young Vietnamese people. The return of Le Van Thiem attracted many talented young people in Vietnam to science and mathematics. In 1951, in the forest of Viet Bac, the capital of the government of the Democratic Republic Vietnam during the war against France, Le Van Thiem founded the *University of Science*. The first students of the University of Sciences later became the leading scientists of Vietnam. It can be said that the University of Sciences played an important role not only in teaching students on the university level, but also in creating the first mathematical research group in Vietnam after the colonial years.

Schoolchildren in the liberation zones studied under the 10-year school system using textbooks in Vietnamese, among them a book on geometry written by Hoang Tuy. And in the French region, they studied by the French system.

Vietnamese Mathematics and Mathematics Education from 1954 to 1975

The war of resistance against France was ended in 1954. Since 1955, the Vietnamese Government has decided to teach in Vietnamese at all levels. In 1956, Hoang Tuy was appointed chairman of the textbooks editorial board, he was also the author of the first mathematics textbooks in the Democratic Republic Vietnam.

Since the 1960s, every year, even during the war, the Ministry of Education organized mathematical Olympiads for primary schoolchildren (4th, 7th grade) and for high school students (10th grade). Specialized mathematical classes were first organized at the University of Hanoi, at the Hanoi Pedagogical Institute, at the Vinh Pedagogical Institute, and after in almost all the provinces of the North Vietnam. Mathematical Society created the journal *Matematics and Youth*. All this stimulated mathematical love of young man. Many school students of the specialized classes won medals at international mathematical

Olympiads (IMO), and sent abroad to study mathematics. Nowadays they have become famous mathematicians (Ngo Bao Chau, Vu Ha Van, ...).

Schoolchildren in the south studied under the 12-year school system.

The university opened in Hanoi again in 1955. Le Van Thiem was the rector of the University of Science. Students who graduated from the University of Science had the opportunity to do research in mathematics. Many of them were sent abroad, mainly to the USSR, to Eastern Europe or to China for receiving the title of candidate of phys-mat. sciences. Almost all of them received a Ph.D. after 2 or 3 years of study. In particular, just one year later, Hoang Tuy wrote a PhD thesis under the guidance of Professor D. E. Menshov, and he published 5 articles in leading Russian journals during the 20 months of his stay in Moscow. A few years later, Hoang Tuy became the "founding father" of global optimization, with the famous *Tuy's cut* in non-convex optimization. Another postgraduate student, Nguyen Canh Toan, successfully defended his doctoral dissertation in Russia (in 1963) with important results in projective geometry, which he received while teaching at the University of Science. After he became deputy minister of education.

The Vietnamese Mathematical Society, which was founded in 1964, played an important role in the development of mathematics and the teaching of mathematics in Vietnam.

In this time, two Vietnamese research mathematics journals in foreign languages (English, French and Russian) was founded: *Acta Mathematica Vietnamica* and *Vietnamese Mathematical Journal*.

During this period, many mathematicians changed their interests from theoretical math to applied math, following the government's science policy (Le Van Thiem, Hoang Tuy, Phan Dinh Dieu, ...).

Despite the war, the government still sent many young people to study abroad in many professions, including mathematics. Most of the current mathematicians at the age of 50-70 studied abroad, especially in the Soviet Union. At the same time, the government decided to prepare graduate students and doctoral students in Vietnam.

Government policies worked: scientific and technical forces, including mathematics, were developed both in quantity and in quality.

Vietnamese mathematics and mathematics education from 1975 to the present

After the country's reunification in 1975, mathematics in Vietnam finally experienced favorable conditions for development: Mathematicians of the South and the North become members of the Vietnamese Mathematical Association; Cooperation has become much easier. Many young people get scholarships to study abroad, not only in socialist countries, but also to other countries: France, West Germany, Italy, Japan, etc. The Vietnamese Mathematical Association and the Vietnamese state always pay attention to scientific relations with foreign countries.

For more information about Han-Nom math books, see [4].

Vietnam occupies a certain position on the mathematical map of the world: Professor Ngo Bao Chau was awarded the Fields medal; The Institute of Mathematics became one of the 10 best institutions of the Third World Academy; Vietnamese mathematics now grow in quantity and in quality.

References

[1] Ta Ngoc Lien (1979) *Some Features of Vietnamese Mathematics in Pre-modern Times* (in Vietnamese), In: *The Study of Science and Technology in Vietnamese History*, Hanoi, Social Sciences Publishing House, pp. 289-314.

[2] A. Volkov (2008), *Mathematics in Vietnam*, In: H. Selin (ed.), *Encyclopaedia of Non-Western Science*, Springer-Verlag, pp. 1425-1432.

[3] A. Volkov (2009), *Mathematics and Mathematics Education in Traditional Vietnam*. In: Eleanor Robson and Jacqueline Stedall (eds.), *Oxford Handbook of History of Mathematics*, Oxford, Oxford University Press, pp. 153-176.

[4] Ha Huy Khoai (2013), *On Contemporary Mathematics in Vietnam*, In: Eberhard Knobloch, Hikosaburo Komatsu, Dun Liu (Eds.), *Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan, A Commemoration on His Tercentenary*, Springer Proceedings in Mathematics & Statistics, Vol. 39, Springer Japan, pp. 375-383.

ON THE LINEAR PURSUIT GAMES ON TIME SCALE[1]

© Ta Duy Phuong
Hanoi Institute of Mathematics
Vietnam

© Vi Dieu Minh
University of Agriculture and Forestry
Vietnam

© Le Thi Thuy Nga
Hung Yen High School
Vietnam

© Le Van Quy
Hung Yen High School
Vietnam

In this paper we consider the pursuit game on the time scale. The sufficient conditions for completing the pursuit process on the time scale with the geometric or integral constraints on controls are presented.

1 Introduction

The theory of time scales, which has recently received a lot of attention, was introduced by Stefan Hilger in his PhD thesis [5] in 1988 in order to unify continuous and discrete analysis. Many results one encounters in the study of both differential and difference equations have analogs in the time scale case (see, [1], [2], [3]). In recent years, the basic results of the differential equation (qualitative theory, stability theory, ...) and the theory of controls (controllability, optimal controls,...) have been formulated according to the dynamic systems on time scales, see, for example, [1]-[4], [6], [7]. However, to our knowledge, the games on time scales (the dynamic system under two controls with opposite targets), have yet to receive not enough attention.

The pursuit problem is a basic problem of games theory. This problem can be formulated as follows: The motions of two given objects (the pursuer and the evader) are described by the dynamic system on time scales involved in the control variables. The goal of the pursuer is to catch up with the evader as quickly as possible. The goal of the evader is to keep themselves from the pursuer for a long time as possible. Therefore, we can say that the pursuer needs minimize a function and evader needs maximize that function. The pursuer shall construct their control $u(t)$ according to the information

[1] The first author's research was supported by the joint research project from RFBR and VAST.QTRU 03.02/18-19.

about $v(t)$ of the evader, i.e., $u(t) := u(v(t))$. May can see that the results of the paper are the combination of the results in linear pursuit differential and/or difference games (see, for example, [9]).

2 The analysis and dynamic equations on time scales

2.1 Time scale

Definition 2.1 (see [5]) *A time scale* is an arbitrary nonempty closed subset of the real numbers. Throughout this paper we denote a time scale by the symbol $\mathbb{T}$.

If $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ (the real numbers) we have *the continiuos time scale*.

If $\mathbb{T} = \mathbb{N}$ (the set of natural numbers) or $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$ (the set of integers), we have *the discrete time scale*. However, the general theory is of course applicable to many more time scales $\mathbb{T}$. For example, $\mathbb{T} = \bigcup_{k=0}^{\infty} T_k = \bigcup_{k=0}^{\infty} [2k, 2k+1]$ is a time scale.

In this section we give only some definitions and theorems from analysis and dynamic system on time scales, which are need in the following section. The analysis and dynamic equations on time scales can see in [1], [2], [3].

Let $\mathbb{T}$ be a time scale.

Definition 2.2 (see [2]) For $t \in \mathbb{T}$,

The *forward jump operator* $\sigma : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ is defined by $\sigma(t) := \inf\{s \in \mathbb{T}, s > t\}$.

The *backward jump operator* $\rho : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ is defined by $\rho(t) := \sup\{s \in \mathbb{T}, s < t\}$.

The grainiess function $\mu : \mathbb{T} \to [0; \infty)$ is defined by $\mu(t) := \sigma(t) - t$.

Definition 2.3 Let $\mathbb{T}$ be a time scale and point $t \in \mathbb{T}$.

If $\sigma(t) > t$ than we say that t is *right-scattered* point.

If $\rho(t) < t$ than we say that t is *left-scattered* point.

The point $t \in \mathbb{T}$ is called *insolated* if $\rho(t) < t < \sigma(t)$.

If $t < \sup \mathbb{T}$ and $\sigma(t) = t$ then t is called *right-dense* point.

If $t > \inf \mathbb{T}$ and $\rho(t) = t$ then t is called *left-dense* point.

Points $t \in \mathbb{T}$ are called *dense* if $\rho(t) = t = \sigma(t)$.

2.2 The analysisontimescales

Topology on time scales

The topology on $\mathbb{T}$ is a topology inherited by the standard topology on the real line, i.e., the open set in the topology of $\mathbb{T}$ is a intersection of the open set of $\mathbb{R}$ with $\mathbb{T}$. The concept of neighborhood, limits and continuous functions are defined by natural way.

If $\mathbb{T}$ has a left - scattered maximum M then we denote $\mathbb{T}^k := \mathbb{T} \setminus \{M\}$ and $\mathbb{T}^k := \mathbb{T}$ otherwise.

Let function $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ is defined in $\mathbb{T}$ and takes values in $\mathbb{R}$.

Definition 2.4 A function $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ is called *regulated* if its right-sided limits exits (finite) at all right-dense points in $\mathbb{T}$ and its left-sided limits exists (finite) at all left-dense points in $\mathbb{T}$.

Definition 2.5 A function $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ is called *rd-continuous* if it is continuous at right-dense points in $\mathbb{T}$ and its left - sided limits exists (finite) at left-dense points in $\mathbb{T}$.

A $n\times n$ matrix $A(.)$ which is defined in $\mathbb{T}$ is called *rd-continuous* if each elements of $A(.)$ is rd-continuous on $\mathbb{T}$.

A rd-continuous function $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ is called *regressive* if $1+\mu(t)f(t)\neq 0,\forall t\in\mathbb{T}$.

A $n\times n$ rd-continuous matrix $A(.)$ is called *regressive matrix* if $I+\mu(t)A(t)$ is a matrix invertible for all $t\in\mathbb{T}^k$, where $I=I_n$ be unit matrix of order $n\times n$.

The set of regressive matrix will be denoted by $\Re=\Re(\mathbb{T},\mathbb{R}^n)$.

Derivativeontimescales

Assume $x:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ is a function and let $t\in\mathbb{T}^k$.

Definition 2.6 The *derivative* of the function $x(.)$ at t, defined by $x^{\Delta}(t)$, is the number (if it exists) with the property that given any $\epsilon>0$, there is a neighborhood U of t (i.e., $U:=(t-\delta,t+\delta)\cap\mathbb{T}$ for some $\delta>0$) such that

$$|[x(\sigma(t)-x(s)]-x^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]|\leq\epsilon|\sigma(t)-s| \text{ for all } s\in U.$$

We call $x^{\Delta}(t)$ the *Delta* (or *Hilger*) *derivative* of x at t.

The Hilger derivative of vector function $x:\mathbb{T}\to\mathbb{R}^n$ is a vector of Hilger derivative of each coordinates.

If $\mathbb{T}\equiv\mathbb{R}$ then Hilger derivative is the usual derivative and Hilger derivative is the usual forward difference operator if $\mathbb{T}\equiv\mathbb{Z}$.

We say that $x(.)$ is $\Delta-$differentiable (or in short differentiable) on $D\subset\mathbb{T}^k$ if $x^{\Delta}(t)$ exists for all $t\in D\subset\mathbb{T}^k$.

The theory of the delta-measure and delta-integration on time scales, see [2], [3].

Definition 2.7 Let $\mathbb{T}$ is the time scales. A continuous function $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ is called *pre-differentiable* on D (region of differentiation) if the following conditions hold:

a) $D\subset\mathbb{T}^k$;

b) $\mathbb{T}^k\setminus D$ is countable and contains no right-scattered elements of $\mathbb{T}$.

c) f is differentiable at each $t\in D$.

Definition 2.8 1) Let f be regulated. Then there exists a function F which is pre-differntiable with region of differentiation D such that $F^{\Delta}(t)=f(t)$ holds for all $t\in D$. F is called a *pre-antiderivative* of f.

2) The *indefinite integral* of a regulated function f is defined by $\int f(t)\Delta t := F(t) + C$, where C is an arbitrary constant and F is a pre-antiderivative of f.

3) Let F be pre-antiderivative of f and $r, s \in \mathbb{T}$. *Definite integral* of a regulated function f is defined by $\int_r^s f(t)\Delta t := F(s) - F(r)$.

4) A function $F : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ is called an *antiderivative* of $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ if $F^{\Delta}(t) = f(t)$ holds for all $t \in \mathbb{T}^k$.

2.3 Dynamic system on time scale

Definition 2.9 Let $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$. Consider linear dynamic system

$$x^{\Delta}(t) = A(t)x(t) + f(t), t \in \mathbb{T}, x(t_0) = x_0, \tag{2.1}$$

where $A \in \Re$ and f is an rd-continuous function.

Vector function $x(.) : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^n$ is differentiable on $\mathbb{T}$ satisfying (2.1) for all $t \in \mathbb{T}$

is called *solution* or *trajectory* of dynamic system (2.1) on time scale $\mathbb{T}$.

Theorem 2.1 [3] *Assume that $t_0 \in \mathbb{T}$ and $A \in \Re$ is a matrix of order $n \times n$. Then, the initial value problem*

$$X^{\Delta}(t) = A(t)X(t), \quad X(t_0) = I_n, \tag{2.2}$$

has a unique solution, where I_n be unit matrix of order $n \times n$. The solution of (2.2) is denoted by $\Phi_A(t, t_0)$.

Theorem 2.2 [3] *Let $A : \mathbb{T}^k \to \mathbb{R}^{n \times n}$ and $f : \mathbb{T}^k \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ be rd-continuous. If $x(t)$, $t \geq t_0$, is a solution of dynamic system (2.1),then we have*

$$x(t) = \Phi_A(t, t_0)x_0 + \int_{t_0}^{t} \Phi_A(\tau, \sigma(\tau)) f(\tau)\Delta\tau. \tag{2.3}$$

3 The linear pursuit game on time scales

3.1 The linear pursuit game

The linear pursuit process can be described as follows.

Let we have a dynamic system on the time scales

$$z^{\Delta}(t) = A(t)z(t) - B(t)u(t) + C(t)v(t), \quad t \geq t_0, t, t_0 \in \mathbb{T}, \tag{3.1}$$

where $z \in \mathbb{R}^n$; $A(t), B(t)$ and $C(t)$ are matrices of the order $n \times n, n \times p, n \times q$ respectively.

The functions $u(.)$, $u : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^p$ is the pursuit control and $v(.), v : \mathbb{T} \to \mathbb{R}^q$ is the evasion control. The controls $u(t), v(t)$ are measurable functions satisfying one of two constraints:

1) Geometrical constraints:

$$u(t) \in P(t) \subseteq \mathbb{R}^p, \; v(t) \in Q(t) \subseteq \mathbb{R}^q, \; t \in \mathbb{T}, \tag{3.2}$$

or

2) Integral constraints (with $T := \sup\{t, t \in \mathbb{T}\}$):

$$\int_{t_0}^{T} \|u(s)\|^2 \Delta s \le \rho^2, \int_{t_0}^{T} \|v(s)\|^2 \Delta s \le \delta^2. \tag{3.3}$$

Such $u(.)$ and $v(.)$ satisfying (3.2) or (3.3) will be called *admissible controls*.

When controls $u(.)$ and $v(.)$ are chosen, takes into process (3.1), using (2.3), the solution of (3.1) has form

$$z(t) = \Phi_A(t, t_0) z_0 - \int_{t_0}^{t} \Phi_A(\tau, \sigma(\tau)) B u(\tau) \Delta\tau + \int_{t_0}^{t} \Phi_A(\tau, \sigma(\tau)) C v(\tau) \Delta\tau. \tag{3.4}$$

Let $M \subseteq \mathbb{R}^n$. We say that the linear pursuit game (3.1), begining from $z(t_0) = z_0 \notin M$ is completed after the time $K \in \mathbb{T}$ if for any admissible control $v(.)$ of the evader, we can construct an admissible control $u(t) = u(v(t))$ of the pursuer such that the solution of the equation (3.1) satisfies $z(K) \in M$.

Let M be a subset of $\mathbb{R}^n$ such that $M = M_1 + M_2 \subseteq \mathbb{R}^n$, where M_1 is a subspace $\mathbb{R}^{N_1}$ in $\mathbb{R}^n$ and M_2 a subset of $\mathbb{R}^{N_2}$, where $\mathbb{R}^{N_2}$ is the orthogonal complement to M_1 in $\mathbb{R}^n$ (with respect to a given basics in $\mathbb{R}^n$).

Let π denote the orthogonal projection from $\mathbb{R}^n$ onto $\mathbb{R}^{N_2}$. Then the condition for the pursuit game to be completed $z(K) \in M$ equivalent $\pi z(K) \in M_2$.

3.2 The linear pursuit game with geometrical constrains on time scale

Consider the linear pursuit game on time scales (3.1) with geometrical constrains (3.2).

To solve the pursuit process with geometrical constrains, L. S. Pontryagin defined the geometrical difference of two sets (the Pontryagin geometrical difference, see [10]) as follows: Let $A, B \in \mathbb{R}^n$, then *Pontryagin geometrical difference* $A \stackrel{*}{-} B$ is defined by

$$A \stackrel{*}{-} B := \{z \in \mathbb{R}^N, z + B \subseteq A\}.$$

Theorem 3.1 *Assume $K \in \mathbb{T}$ is the smallest number of the $t \ge t_0$, $t \in \mathbb{T}$ such that the assumption are satisfied*

1) $\Pi\Phi_A(K, t) B(t) P(t) \stackrel{*}{-} \Pi\Phi_A(K, t) C(t) Q(t) \ne \varnothing$ *for all* $t_0 \le t < K$, $t \in \mathbb{T}$.

2)

$$\Pi\Phi_A(K, t_0) z_0 \in M_2 + W(K),$$

where

$$W(t) = \int_{t_0}^{t} \left(\Pi\Phi_A(t, \tau) B(\tau) P(\tau) \stackrel{*}{-} \Pi\Phi_A(t, \tau) C(\tau) Q(\tau)\right) \Delta\tau.$$

Then the linear pursuit game (3.1) with geometrical constrains (3.2) is completed after the time K.

3.3 The linear pursuit game with integral on time scales

Consider the linear pursuit process (3.1) with constrains (3.3).

Theorem 3.2 *Assume that the following assumptions are satisfied.*

Assumption 1 *There exists a matrix rd-continuous* $F(\tau):\mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^p$ *such that*

$$\Pi\Phi_A(t,\tau)B(\tau)F(\tau) = \Pi\Phi_A(t,\tau)C(\tau), \forall\, \tau \geq t_0, \tau \in \mathbb{T}.$$

Assumption 2 $K \in \mathbb{T}$ *is the smallest number of the* $t \geq t_0$, $t \in \mathbb{T}$ *such that* $\chi(t) \leq \rho$,

where

$$\chi^2(t) = \sup_{\int_{t_0}^{t} \|v(\tau)\|^2 \Delta\tau \leq \sigma^2} \int_{t_0}^{t} \left\|F(\tau)v(\tau)\right\|^2 \Delta\tau.$$

Assumption3 $\Pi\Phi_A(K,t_0)z_0 \in M_2 + G(K)$, *where*

$$G(K) := \left\{ \int_{t_0}^{K} \Pi\Phi_A(K,\tau)B(\tau)w(\tau)\Delta\tau : \int_{t_0}^{K} \left\|w(\tau)\right\|^2 \Delta\tau \leq (\rho - \chi(K))^2 \right\}.$$

Then the pursuit game (3.1) - (3.3) *is completed after the time* K.

Proofs of the theorems 3.1 and 3.2, see in [8].

Conclusion and future work

Sufficient conditions for completing the game on the time scale in this article can be developed in the following directions:

1) The game on time scale with different constraints, i.e: The pursuer is satisfying the geometric constraint, and the evader is satisfying the integral constraint, or vice versa.

2) The game with delay in information on time scale, i.e: At each time t, the pursuer can construct an admissible control by the control of the evader by the forrmula $u(t) = u(v(r(t)))$, where $r(t)$ is an increasing function satisfying the condition $0 \leq r(t) \leq t$.

3) Games on time scale with general information, including: with delay, incomplete information.

4) Game on time scale with mixed dynamics (see [9]), i. e: The dynamic equation of the pursuer is on the time scale $\mathbb{T}_1$ (for example, a continuous time scale), and the dynamic equation of the evader is on the time scale $\mathbb{T}_2$ (for example, a discret time scale).

References

1. Ravi Agarwal, Martin Bohner, Donalo'Regan, Allan Peterson (2002), Dynamic equations on time scales: a survey, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **141**, pp. 1-26.

2. Martin Bohner, Allan Peterson (2001), *Dynamic Equations on Time Scales - An introduction with Applications*, Birkhouser, Boston.

3. Martin Bohner, Allan Peterson (Eds.), (2003), *Advances in Dynamic Equations on Time Scales,*Birkhäuser, Boston.

4. J. J. DaCunha (2004), *Lyapunov Stability and Floquet Theory for Noautonomous Linear Dynamic Systems on Time Scales*, Ph. D. Thesis, Baylor University.

5. S. Hilger (1988) *Ein Maßkettenkalkülmitanwendung auf Zentrumsmanning-faltikeiten,* Ph.D. thesis, Universität Würzburg.

6. B. J. Jacson (2007), *A General Linear Systems Theory on Time Scales: Transforms, Stability, and Control*, Ph. D. Thesis, Baylor University.

7. Nguyen Chi Liem (2012), *Stability of the implicit dynamic equations on the time Scale*s, Ph. D. Thesis, VNU University of Science (in Vietnames).

8. Vi Dieu Minh (2018), On the linear pursuit game on time scale, *Journal of Sciences, Thai Nguyen University*, Volume 178, Number 02, pp.85 -90 (in Vietnames).

9. Ta Duy Phuong and Phan Huy Khai (1990), Linear pursuit games with mixed dynamics, *Acta Mathematica Vietnamica*, Volume 15, Number 2, pp. 25-38 (in Russian).

10. L. S. Pontryagin (1970), Linear differential games of pursuit, *Mat. Sb*. 112 (154) (1980), 307—330; English transl. in *Math. USSR Sbornik* 40 (1981).

RIGOROUSLY VERIFIED SOLUTION OF ODES

© Siegfried M. Rump
Institute for Reliable Computing
Hamburg University of Technology
Germany
E-mail: rump@tuhh.de

In this talk we present a recent MATLAB implementation of two methods for rigorously solving ordinary differential equation. Rigorously means that all numerical errors, rounding errors and a alike are rigorously estimated. The solution is given by means of a lower and an upper bound curve with the mathematical proof that the true solution exists and is between the boundary curves for all real point in the integration interval. The methods are based on Lohner's AWA and on Taylor arithmetic with some corrections. Numerical results look promising. All algorithms are part of the new Version 11 of INTLAB, the MATLAB/Octave toolbox for Reliable Computing.

TO THE PROBLEM OF SUFFICIENT OPTIMALITY CONDITIONS BASED ON THE MAXIMUM PRINCIPLE

© Srochko Vladimir
Dr. Sci. (Phys. and Math.), Prof.,
Irkutsk State University
Russia, Irkutsk, Gagarin Boulevard, 20
E-mail: srochko@math.isu.ru

© Aksenyushkina Elena
Cand. Sci. (Phys. and Math.), A/Prof
Baikal State University
Russia, Irkutsk, Lenin street, 11
E-mail: aks.ev@mail.ru

We consider a nonconvex optimal control problem with a bilinear functional and a linear phase system. Based on the maximum principle we establish sufficient optimality conditions. To this end, we apply the notion of a strongly extremal control that maximizes the Pontryagin function on the set of phase or conjugate trajectories [1, 2].

In view of specific properties of the problem under consideration, we can transform optimality conditions with the help of explicit expressions for extremal values of auxiliary problems. As a result, we obtain optimality conditions in the desired form, namely, we state them as inequalities with respect to scalar functions on a certain time interval. The advantage of this approach is the dual character of obtained conditions, namely, they represent pairs of independent symmetric correlations. Papers [3–6] are relevant to the topic of this work.

Keywords: bilinear control problem, maximum principle, sufficient optimality conditions.

1. The problem optimality conditions

Consider the following optimal control problem:

$$\Phi(u) \to \max, \quad u \in V, \tag{1}$$

where

$$\Phi(u) = < c, x(t_1) > + \int_{t_0}^{t_1} (< a(t), x(t) > u(t) - \gamma \mid u(t) \mid) dt,$$

$$\dot{x} = A(t)x + b(t)u, \qquad x(t_0) = x^0,$$

$$V = \{ u(\cdot) \in PC([t_0, t_1]) : \mid u(t) \mid \le 1, \ t \in [t_0, t_1] \}.$$

Here $u(t) \in R$ is a control, $x(t) \in R^n$ is a phase state, $PC([t_0, t_1])$ is the set of piecewise continuous functions, c, x^0 and $\gamma > 0$ are problem parameters.

Assume that the vector functions $a(t), b(t)$ and the matrix function $A(t)$ are continuous on $[t_0, t_1]$.

Consider correlations of the maximum principle for problem (1). Introduce the Pontryagin function

$$H(\psi, x, u, t) = <\psi, A(t)x> + (<a(t), x> + <b(t), \psi>)u - \gamma |u|$$

and the conjugate system

$$\dot{\psi} = -A^T(t)\psi - a(t)u, \qquad \psi(t_1) = c.$$

Denote $w(\psi, x, t) = <a(t), x> + <b(t), \psi>$ and define an H-maximizing control such that $|u| \le 1$:

$$u_*(\psi, x, t) = \begin{cases} sign\, w(\psi, x, t), & |w(\psi, x, t)| > \gamma, \\ 0, & |w(\psi, x, t)| \le \gamma. \end{cases}$$

The alternative variant of inequalities $(\ge \gamma, < \gamma)$ is also valid.

Let $u(t),\ t \in [t_0, t_1]$ be an admissible control $(u \in V)$ and let $x(t, u)$, and $\psi(t, u)$ be the corresponding trajectories. Then the maximum principle for the control $u(t)$ takes the form

$$u(t) = u_*(\psi(t, u), x(t, u), t), \qquad t \in [t_0, t_1].$$

Let us establish sufficient optimality conditions on the base of [1]. To this end, we sequentially change variables

$$x(t, u) \to x(t, v), \quad v \in V, \text{ or } \psi(t, u) \to \psi(t, v), \quad v \in V$$

(i.e., a fixed trajectory → an arbitrary trajectory).

As a result, we obtain the following sufficient optimality conditions for the control $u(t)$:

1) $u(t) = u_*(\psi(t, u), x(t, v), t), \quad \forall v \in V, \quad t \in [t_0, t_1],$

2) $u(t) = u_*(\psi(t, v), x(t, u), t), \quad \forall v \in V, \quad t \in [t_0, t_1].$

In order to reduce these conditions to pointwise ones with respect only to time $t \in [t_0, t_1]$, let us find extremal values of scalar products $<a(t), x(t, v)>$, $<b(t), \psi(t, v)>$ at the moment $t \in [t_0, t_1]$ on the control set V.

Lemma 1. Let a vector function $p(\tau, t),\ \tau \in [t_0, t],\ t \in [t_0, t_1]$, be a solution to the Cauchy problem,

$$p_\tau(\tau, t) = -A^T(\tau)p(\tau, t), \qquad p(t, t) = a(t).$$

Then extremal values for $<a(t), x(t, v)>$ obey the formula

$$\min_{v \in V}[\max_{v \in V}] <a(t), x(t, v)> = <p(t_0, t), x^0> - [+]\int_{t_0}^{t} |<b(\tau), p(\tau, t)>| d\tau.$$

Lemma 2. Let a vector function $q(\tau, t),\ \tau \in [t, t_1],\ t \in [t_0, t_1]$, be a solution to the Cauchy problem

$$q_\tau(\tau, t) = -A(\tau)q(\tau, t), \qquad q(t, t) = b(t).$$

Then extremal values for $<b(t), \psi(t, v)>$ obey the formula

$$\min_{v \in V}[\max_{v \in V}] <b(t), \psi(t, v)> = <q(t_1, t), c> - [+]\int_{t}^{t_1} |<a(\tau), q(\tau, t)>| d\tau.$$

2. The simplest controls

Let us find out whether the control $u(t)=0,\ t\in[t_0,t_1]$ is optimal. In the framework of condition 1) for $t\in[t_0,t_1]$ it corresponds to the modular inequality

$$|<a(t),x(t,v)>+<b(t),\psi(t,u)>|\le\gamma,\qquad v\in V.$$

Let us consider the equivalent extremal form

$$\max_{v\in V}<a(t),x(t,v)>+<b(t),\psi(t,u)>\le\gamma,$$

$$\min_{v\in V}<a(t),x(t,v)>+<b(t),\psi(t,u)>\ge-\gamma.$$

Taking into account Lemma 1, we obtain the correlation

$$|<b(t),\psi(t,u)>+<p(t_0,t),x^0>|+\int_{t_0}^{t}|<b(\tau),p(\tau,t)>|\,d\tau\le\gamma. \quad (2)$$

We treat the modular inequality in condition 2) analogously, taking into account Lemma 2. As a result, we get the inequality

$$|<a(t),x(t,u)>+<q(t_1,t),c>|+\int_{t}^{t_1}|<a(\tau),q(\tau,t)>|\,d\tau\le\gamma. \quad (3)$$

Theorem 1. Assume that the control $u(t)=0,\ t\in[t_0,t_1]$, satisfies inequality (2) or (3) for all $t\in[t_0,t_1]$. Then this control is optimal in problem (1).

Example 1. Consider the problem

$$\Phi(u)=x_1(t)+\int_0^1[(x_1(t)+x_2(t))u(t)-\gamma\,|u(t)|]\,dt\to\max,$$

$$\dot{x}_1=x_2,\quad \dot{x}_2=u,\quad x_1(0)=-2,\quad x_2(0)=1,$$

$$|u(t)|\le 1,\quad t\in[0,1].$$

The control $u=0$ corresponds to trajectories

$$x_1(t,0)=t-2,\quad x_2(t,0)=1,\quad \psi_1(t,0)=1,\quad \psi_2(t,0)=1-t.$$

The control $u=0$ satisfies the maximum principle $\forall\gamma>0$. Let us verify condition (2). The vector function $p(\tau,t)$ obeys equalities $p_1=1$, $p_2=t-\tau+1$.

Inequality (2) takes the form $\frac{1}{2}t^2+t\le\gamma,\ t\in[0,1]$. Hence, if $\gamma\ge\frac{3}{2}$, then the control $u=0$ is optimal.

Let us now find out whether boundary controls $u=\pm1$ are optimal.

Sufficient conditions for the control $u(t)=1,\ t\in[t_0,t_1]$, take the following form:

$$\min_{v\in V}<a(t),x(t,v)>+<b(t),\psi(t,1)>\ge\gamma,$$

$$< a(t), x(t,1) > + \min_{v \in V} < b(t), \psi(t,v) > \geq \gamma .$$

As a result, for $t \in [t_0, t_1]$ we get inequalities

$$< b(t), \psi(t,1) > + < p(t_0,t), x^0 > - \int_{t_0}^{t} | < b(\tau), p(\tau,t) > | \, d\tau \geq \gamma , \qquad (4)$$

$$< a(t), x(t,1) > + < q(t_1,t), c > - \int_{t}^{t_1} | < a(\tau), q(\tau,t) > | \, d\tau \geq \gamma . \qquad (5)$$

Theorem 2. Let the control $u(t) = 1$, $t \in [t_0, t_1]$, satisfy inequality (4) or (5) for all $t \in [t_0, t_1]$. Then this control is optimal in problem (1).

Example 2. Consider the problem

$$\Phi(u) = \int_0^1 [(x_1(t) + x_2(t))u(t) - \gamma |u(t)|] \, dt \to \max,$$

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = u, \quad x_1(0) = x_1^0 \quad x_2(0) = x_2^0,$$

$$|u(t)| \leq 1, \quad t \in [0,1] .$$

The control $u = 1$ corresponds to trajectories

$$x_1(t,1) = \frac{1}{2}t^2 + x_2^0 t + x_1^0, \qquad x_2(t,1) = t + x_2^0,$$

$$\psi_1(t,1) = 1 - t, \qquad \psi_2(t,1) = \frac{1}{2}(t-1)^2 - (t-1).$$

Inequality (4) takes the form

$$x_1^0 + x_2^0(t+1) - 3t + \frac{3}{2} \geq \gamma, \qquad t \in [0,1],$$

which is equivalent to two conditions with respect to parameters

$$x_1^0 + x_2^0 + \frac{3}{2} \geq \gamma, \qquad x_1^0 + 2x_2^0 - \frac{3}{2} \geq \gamma, \qquad (6)$$

The concrete form of the second inequality (5) is the following one:

$$x_1^0 + x_2^0(t+1) + 3t - \frac{3}{2} \geq \gamma, \qquad t \in [0,1],$$

which leads to conditions

$$x_1^0 + x_2^0 - \frac{3}{2} \geq \gamma, \qquad x_1^0 + 2x_2^0 + \frac{3}{2} \geq \gamma. \qquad (7)$$

Thus, we conclude that if the initial state of the phase system (x_1^0, x_2^0) and the parameter $\gamma > 0$ in the functional satisfy condition (6) or (7), then the control $u = 1$ is optimal.

Note that conditions (6) and (7) are, generally speaking, independent. For example, the collection $\gamma = \frac{3}{2}$, $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 1$ satisfies condition (6) but

violates condition (7). For example, the case when $\gamma = \frac{3}{2}$, $x_1^0 = 4$, $x_2^0 = -1$ is an opposite one.

Remark. One can deduce optimality conditions for the control $u = -1$ analogously, namely, consider the initial inequality $(\ldots \le -\gamma)$ $(\ldots \le -\gamma)$ and perform the operation $\max\limits_{v \in V}$.

References

1. Srochko V. A., Antonik V. G. Sufficient conditions of optimality of extremal controls on the basis of a formula of the increment of the functional // Izvestiya vuzov. Mathematics. 2014. No. 8. P. 96-102.
2. Srochko V., Antonik V., Aksenyushkina E. Sufficient optimality conditions for extreme controls based on functional increments // Numerical Algebra, Control and Optimization. 2017. Vol. 7, №2. P. 191-199.
3. Mangasarian O. L. Sufficient conditions for the optimal control of nonlinear systems // SIAM J. Control Optim. 1966. No. 4. P. 139-152.
4. Krotov V. F., Gurman V. I. Methods and problems of optimal control. M.: Science, 1973. 448 p.
5. Clark F. Optimization and nonsmooth analysis. M.: Science, 1988. 280 PP.
6. Srochko V. A. Iterative methods for solving optimal control problems. M.: Fizmatlit, 2000. 160 PP.

ERROR ANALYSIS OF A NEW FAMILY OF NONCONFORMING FINITE ELEMENT FOR SOLVING THE POISSON EIGENVALUE PROBLEM

© Yassine Zaim
Laboratoire de Math´ematiques de Besan¸
Univ. Bourgogne Franche Comt´e
France
E-mail: yassine.zaim@univ-fcomte.fr

The aim of my talk is to present an idea which allows us to improve the consistency error for the Poisson eigenvalue problem. This idea was used in an earlier work in order to improve the consistency error as well as to avoid the looking phenomenon for the linear elasticity problem. It is based on the use of a non- conforming family of Quasi-Wilson type. In this talk, we give an extension of this idea to the above-cited problem by using the same family of elements.

References

1. B. Achchab, A. Agouzal, A. Guessab, Y. Zaim, An extended family of non- conforming quasi-Wilson elements for solving elasticity problem, Applied Mathematics and Computation, Volume 344-345 :1-19, 2018.
2. B. Achchab, A. Guessab, Y. Zaim, A new class of nonconforming finite element for enrichment of 1 element on convex polytope, Applied Mathe- matics and Computation 271 (2015), 657-668.

СОДЕРЖАНИЕ

Абидуев П. Л., Дармаев Т. Г. К расчету нестационарного обтекания произвольного профиля 3
Антонова Л. В., Антонов В. И., Бурзалова Т. В. Непрерывная профессиональная подготовка математиков 12
Ачитуев С. А., Мангалжалав Ч. Экономический рост с учетом экологии на магистральных траекториях в задаче оптимального управления..... 17
Баглаев И. И. О полной локализации среды программирования FMSLOGO 20
Базаргуроева Н. Ж., Телешева Л. А. Нелокальная краевая задача для линейного дифференциального уравнения третьего порядка 27
Будникова О. С., Бороева М. Н. k-шаговые алгоритмы для одного семейства интегро-алгебраических уравнений 32
Булатов М. В., Ву Х. Л., Соловарова Л. С. О блочных методах для начальной задачи дифференциально-алгебраических уравнений 37
Булдаев А. С. Краевые задачи для улучшения и оптимизации управляемых систем..... 42
Бурлаков И. Д. Об одном методе улучшения управления в системах с ограничениями 43
Дубанов А. А., Заятуев Б. В., Нефедов Ю. Ю. Построение геодезических линий в системе компьютерной математики «MathCAD» 51
Дубанов А. А., Заятуев Б. В., Нефедов Ю. Ю. Расчет кинематической схемы в системе компьютерной математики «MathCAD» 61
Думнов В. А., Булдаев А. С. Метод неподвижных точек для принципа максимума Понтрягина 68
Дырхеев К. П. Оценка траекторий роста экономики региона на основе расширенной межотраслевой модели 69
Иринчеев А. А. Психолого-педагогические основы развития профессиональной компетентности будущего учителя 77
Кожевина М. С., Цыренжапов Н. Б. Построение квадратурных формул с участием производных 83
Лакеев А. В. Об асимптотической устойчивости однородных ДАУ 89
Николаева Д. Д. Об одной формальной модели динамической системы 94
Орлов С. С. Слабосингулярные интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах: разрешимость начальных задач и приложения 101
Орлов С. С., Соколова Г. К. О представлении кратного интеграла периодической функции нескольких действительных переменных 102
Орлов С. С., Шеметова В. В. О применении специальной оператор-функции к построению фундаментальных решений абстрактных дифференциальных операторов 108

Севээн А. Э., Телешева Л. А. Об одной обратной задаче для линейного дифференциального уравнения третьего порядка …….. 115
Семисалов Б. В., Круглова Е. А., Блохин А. М. Численный анализ особенности осесимметричных стационарных течений полимерной жидкости 119
Соколова Г. К. Периодические функции нескольких переменных и их приложения к уравнениям в частных производных 125
Трунин Д. О. Об одном подходе к оптимизации квадратичных по состоянию управляемых систем с терминальными ограничениями 126
Убодоев В. В., Коновалова С. И., Фомина И. В. Квазилинейные дифференциальные уравнения со специальной правой частью 127
Федоров В. Е. Дифференциальные уравнения в банаховых пространствах, не разрешимые относительно производной распределенного порядка 132
Цыдыпов С. Г.-Ц. О построении математической модели двухфазной фильтрации в трещиновато-пористой деформируемой среде .. 134
Шеметова В. В. Об одной специальной оператор-функции и ее применении в построении фундаментальных решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах 139
Achituev S., Achituev B. A substantive interpretation of the dual problem in controlled dynamic systems on the basis of sufficient conditions for an absolute minimum 140
Guessab A. On the Enrichment of finite-element approximations 141
Kien B. T. Regularity of multipliers in second-order optimality conditions for semilinear elliptic optimal control problems …… 142
Kita N. Optimal decay rate of global solutions to the Schrödinger equation with cubic dissipative nonlinearity …… 148
Khongorzul D., Hiroyuki O., Uuganbayar Z. Exact solutions of time fractional linear diffusion-wave equations 156
Khongorzul D., Bayarpurev M., Uuganbayar Z. Linear time fractional telegraph equations and their explicit solutions 162
Le D. T., Phuong T. D., Volkov A. A brief overview of the history of Vietnames mathematics and the history of teaching mathematics in Vietnam 167
Phuong T. D., Minh V. D., Nga L. T. T., Quy L. V. On the linear pursuit game on time scale ……... 173
Rump S. M. Rigorously verified solution of ODEs 180
Srochko V. A., Aksenyushkina E. V. To the problem of sufficient optimality conditions based on the maximum principle …… 181
Zaim Y. Error analysis of a new family of nonconforming finite element for solving the Poisson eigenvalue problem 186